Lösungsverhalten von Schülerinnen und Schülern bei einfachen linearen Gleichungen

Eine empirische Untersuchung im 9. Schuljahr und eine Entwicklung eines kategoriellen Computerdiagnosesystems

Von dem Erziehungswissenschaftlichen Fachbereich

der Technischen Universität Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines Doktors der Philosophie

- Dr. phil. -

genehmigte Dissertation von

Rainer Stahl

geboren am 15. September 1961 in Braunschweig

Erstreferent: Prof. Dr. Uwe-Peter Tietze
Korreferent: Prof. Dr. Peter Schroth

Tag der mündlichen Prüfung: 15. März 2000

Vorwort

In dieser Arbeit geht es um den Bereich des Lösens von einfachen linearen Gleichungen. Dieses Gebiet wird in der Schulmathematik systematisch in der 7. und 8. Jahrgangsstufe behandelt. Die Fähigkeit, lineare Gleichungen zu lösen, ist für die Schülerinnen und Schüler eine wichtige Voraussetzung für ein weiteres erfolgreiches Mathematiklernen. Die Curricula setzen ein Beherrschen eines solchen Lösungsverfahrens in der 9. und 10. Jahrgangsstufe und in der Sekundarstufe II geradezu voraus. Insofern kann man ein sicheres Beherrschen eines Lösungsverfahrens für lineare Gleichungen analog zum Beherrschen der schriftlichen Rechenverfahren, zum Beherrschen des Kopfrechnens und z. B. zum Beherrschen des Dreisatzes als *basic skill* - als Grundfertigkeit - ansehen.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird die historische Entwicklung der Schulalgebra, in deren Bereich das Lösen von linearen Gleichungen gehört, aufgezeigt. Das zweite Kapitel widmet sich den Anforderungen, die an die Schülerinnen und Schüler im Algebraunterricht gestellt werden. Als „roter Faden“ dient in diesem aber auch in den folgenden Kapiteln die Gegenüberstellung von „Schülersicht“ und „Lehrersicht". Ausführlich wird sich mit den deutschspachigen Arbeiten von Malle, Vollrath und Lörcher auseinandergesetzt. An verschiedenen Stellen werden unterrichtspraktische Vorschläge gegeben, die aber nicht immer bewertet werden, da entsprechende Unterrichtserfahrungen und -ergebnisse nicht vorliegen. Im dritten Kapitel wird auf Lernschwierigkeiten eingegangen. Sowohl allgemeine als auch auf die Algebra und die Gleichungslehre beschränkte Theorien und Untersuchungen und verschiedene Ansätze zur Fehleranalyse werden vorgestellt. Einen Schwerpunkt bildet die wegweisende Arbeit von Marylin Matz. Im vierten Kapitel wird die eigene empirische Untersuchung einschliesslich erster Auswertungen und Ergebnisse dargestellt. Im fünftem Kapitel wird die selbst entwickelte Software beschrieben, mit deren Hilfe es möglich wird, den Lösungsprozess der Schülerinnen und Schüler genauer zu analysieren. Dieses Kapitel ist sicherlich nicht so leicht zugänglich, obwohl ich versucht habe, den Anteil der „Informatiksprache“ zugunsten einer allgemeinen Verständlichkeit gering zu halten. Das war aber aus inhaltlichen Gründen nicht immer möglich. Das sechste Kapitel umfasst die verschiedenen Auswertungen und Ergebnisse. Im siebten Kapitel wird ein Resumee gezogen und zukünftige Perspektiven werden aufgezeigt.

Alles in allem besteht meine Arbeit aus drei Teilen: einem Theorieteil, einer empirischen Untersuchung, die trotz verschiedener vorabformulierter Hypothesen explorativen Charakter hat, und einer informatischen und mathematikdidaktischen Softwareentwicklung. Sowohl die Software und ihre Entwicklung als auch die empirische Untersuchung werden ausführlich beschrieben.

Bei meiner empirischen Untersuchung folge ich forschungsmethodisch der deskriptiven Fehleranalyse und nutze die Methoden der Künstlichen-Intelligenz-Forschung.

Der Computer kommt auf dreierlei Art ins Spiel; ein selbstentwickeltes Datenbanksystem ermöglicht die Ein- und Ausgabe der Testdaten, und ein dazu programmiertes Prologregelwerk übernimmt die erste Auswertung. Mit dem Standardsoftwarepaket SPSS wird die damit erzeugte Datenbank statistisch ausgewertet. Das Datenbanksystem ist von Lutz Tandecki und mir unter DELPHI erstellt worden, und das Prologregelwerk wurde von mir in SWI-PROLOG programmiert.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Überblick über Schwierigkeitsgrade von Aufgaben, Fehlermuster bei Aufgaben und verwendete Strategien zum Lösen zu erhalten. Durch den Einsatz der selbst entwickelten Software wird es möglich, auch große Datenmengen zu untersuchen und zusätzlich zum Lösungsprodukt (den vorliegenden schriftlichen Schülerlösungen) auch den Lösungsprozess zugänglich zu machen und damit zu analysieren.

Außerdem werden Grundlagen für die zukünftige Entwicklung von adaptiven Diagnosesystemen und intelligenten tutoriellen Systemen im syntaktisch-algorithmischen Bereich der Schulmathematik gelegt.

Nach entsprechenden Vorbereitungen und der Durchführung der Vortests im Verlaufe des Jahres 1996 habe ich im Frühjahr 1997 in 56 Klassen (bzw. Kursen von Integrierten Gesamtschulen) der 9. Jahrgangsstufe einen Test mit jeweils 18 Aufgaben zum Lösen von linearen Gleichungen durchgeführt. Insgesamt nahmen 448 Schülerinnen und 416 Schüler daran teil.

Parallel dazu wurde im Zusammenhang mit einer Diplomarbeit in Informatik ein Dateneingabesystem programmiert, dass in der Lage ist, alle vom Schüler verwendeten Formulierungen zu verwalten.

Die Tests wurden mit Unterstützung zweier Hilfskräfte in dieses Programm eingegeben. Zusätzlich wurde eine Datenausgabe realisiert und eine Schnittstelle zum regelbasierten Interpreter SWI-PROLOG hergestellt. Das entsprechende Regelwerk, das nicht nur falsch/richtig-gelöst erkennt, ist in der Lage, Vermutungen über den Fehlerprozess der Schüler zu generieren. Mit diesem Regelwerk kann eine Vielzahl an Klassifikationen der Gleichungen und der durchgeführten Operationen erstellt werden, die es erlauben, eine sehr genaue Auswertung des Lösungsverhaltens und von den Schülern verwendeten Strategien zu erhalten.

Der Konstruktion dieses Regelwerks liegen eine Anzahl von Vermutungen zugrunde, die im entsprechenden Kapitel dieser Arbeit ausführlich dargelegt werden.

Danach wurde die so erstellte Datenbank in das Statistik-Paket SPSS portiert. In SPSS fand dann die eigentliche Auswertung statt.

Im Verlauf stellte sich eine Vielzahl an unvorhergesehenen Schwierigkeiten ein, die zu einer nicht geplanten zeitlichen Verzögerung führte.

Das Prologregelwerk funktionierte auf Prologseite zwar hervorragend und äußerst effizient, doch beim Aufruf aus dem Diagnosesystem KEFA entstanden immer wieder Probleme, die zu Programmabstürzen führten. Die lang gehegte Vermutung war, dass das Prolog-Interface nicht korrekt programmiert war. Erst im Februar dieses Jahres funktionierte ein Durchlauf mit der neuesten Prolog-Version SWI-Prolog 3.20 durch die gesamte Datenbank, der allerdings aufgrund der Vielzahl an Berechnungen und dem „backtracking“ nahezu sieben Tage dauerte. Bei dieser neuen Prolog-Version waren eine Vielzahl von „bugs“ behoben worden und es zeigte sich, dass das Interface korrekt programmiert war.

Außerdem stellte sich SPSS als zu statisch heraus, was zur Folge hatte, dass erst mit Hilfe umfangreicher Skripts und den dazu gehörenden Berechnungen dieses Problem zur Zufriedenheit ausgeräumt werden konnte.

Am Zustandekommen dieser Arbeit haben eine Vielzahl an Menschen einen großen Anteil. Diesen Menschen bin ich zu besonderen Dank verpflichtet, und diesen Dank möchte ich auf diesem Wege gern und von Herzen aussprechen.

An erster Stelle sei Herr Prof. Dr. Tietze genannt, der mich ermutigte, meine berufliche Erfahrung als Schulbuchlektor für Mathematik und Schulsoftware und Freiberufler im Bereich DV-Consulting in eine wissenschaftliche Tätigkeit einzubringen und mich in seinem Institut als wissenschaftlicher Mitarbeiter anstellte.

Des Weiteren seien die Kollegen aus dem Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik, Herr Dr. Dahlke, Herr Förster, Herr Guder und Herr Steibl genannt, die gemeinsam mit Herrn Prof. Dr. Tietze im Rahmen von Forschungskolloquien und in jederzeit möglichen persönlichen Gesprächen Anregungen und konstruktive Kritik zu meiner Forschungsarbeit gaben.

Ein besonderer Dank gilt Herrn Tandecki, der einen wesentlichen Anteil an der Entwicklung von KEFA hat und nicht nur in der Zeit der Erstellung seiner Diplomarbeit mit mir hervorragend zusammenarbeitete, sondern auch jetzt noch bei programmiertechnischen Fragen und Problemen zur Verfügung steht. In diesem Zusammenhang seien Herr Dr. Nauck und Herr Prof. Klawonn, die die Zusammenarbeit mit dem Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund herstellten, und Herr Hennecke genannt, der mich aufgrund seiner Erfahrungen mit SWI-Prolog ermutigte, diesen Weg zu gehen und dessen Umsetzung des C-Prolog-Interfaces für DELPHI sehr wertvoll war.
Eine ganz wichtige Funktion übernahm Frau Homeier, die aufgrund persönlichen Engagements die Schulen und Lehrerinnen und Lehrer „besorgte“, so dass die empirische Untersuchung überhaupt erst möglich wurde.

Nicht zu vergessen sind Frau Goebecke und besonders Frau Graf, die die Eingabe eines Großteils der Daten und die Korrektur übernahmen, und Herr Schefe, der bei der Korrektur der Arbeit behilflich war.

Dass ich mich mit dieser Fragestellung überhaupt beschäftigt habe, hat mit drei Menschen besonders zu tun. Das sind Prof. Dr. Kahle, Dr. Berger, dessen Dissertation mich stark beeindruckt hat, und insbesondere Prof. Dr. Lörcher, mit denen ich während meiner Tätigkeit als Schulbuchlektor eine neuentwickelte Realschulreihe aufbaute.

Auf einen Dank an meine Frau Tina und meine Kinder Lea und Paula will ich einfach nicht verzichten.

DANKE

FÜR GUST

Inhaltsverzeichnis

1. Entwicklung der Algebra in der Schule

In diesem Kapitel wird in einem kurzem Überblick die historische Entwicklung der Algebra skizziert und damit aufgezeigt, dass dieser zentrale Bereich der Mathematik eine lange kulturhistorische Fortentwicklung besaß. In deren Mittelpunkt stand die Frage nach der Lösbarkeit von Gleichungen und insbesondere dem Ermitteln von Lösungen. Im zweiten Abschnitt wird die historische Entwicklung der Schulalgebra dargestellt, wobei hier im Wesentlichen der Stand vor, während und nach der Reformbewegung der sogenannten „neuen Mathematik" unterschieden wird. Den Schwerpunkt bildet das Lösen und die Behandlung von Gleichungen. Im dritten Teilkapitel wird der heutige Stand der Schulalgebra beschrieben. Dabei wird auf Lehrpläne, Schulbücher und die TIMS-Studie eingegangen. In einem Teilabschnitt wird der Stand der Diskussion zur zukünftigen Bedeutung der Schulalgebra kurz angeschnitten. Insbesondere zur Perspektive des Einsatzes von Computeralgebrasystemen wird dabei Stellung bezogen.

1.1. Historische Entwicklung der Algebra

Mit dem *Papyrus Rhind* und dem *Papyrus Moskau* liegen überlieferte Urkunden aus der Zeit von ca. 2000 - 1700 vor unserer Zeitrechnung aus Ägypten vor, die arithmetische Beispiele enthalten. Auch einfache lineare Gleichungen wurden schon gelöst[1]. Es handelte sich um eine Wortalgebra, in der alle Rechnungen in Worten formuliert wurden.
Die Babylonier (um 1700 vor unserer Zeitrechnung) entwickelten eine Gleichungslehre für lineare und quadratische Gleichungen. Die Griechen besaßen mit Diophant (250 - ?) einen Mathematiker, der bereits Abkürzungen für Rechenoperationen und eine besondere Bezeichnung für die Unbekannte benutzte; Gleichungen wurden mit allgemeinen Verfahren gelöst.

Im Mittelalter haben die Araber die Erkenntnisse der Antike und die Entwicklung in Indien (Rechnen mit negativen Zahlen) weiterentwickelt; genannt sei al-Chwarismi (780 - 850), dessen eines Hauptwerk „*Algabr w'almuquabalah*"[2] den Namen Algebra für die Lehre von den Gleichungen geliefert hat.

Im 15. und 16. Jahrhundert erschienen die Lehrbücher der sogenannten Cossisten mit Adam Ries (1492 - 1559) und Christoph Rudolph (1500 - 1545). Die „*Coss*" war eine Stufe zwischen Rechenkunst und der Verwendung von Symbolen und stellt das Grundgerüst der Arithmetik um 1500 dar[3].

Mit Cardano (1501 - 1576) und Vièta (1540 - 1603) wurde die Gleichungslehre unter dem Gesichtspunkt der Lösbarkeit weiterentwickelt. Nach Vorarbeiten von Joseph de Lagrange (1763 - 1813) gelang es schließlich Évariste Galois (1811 - 1832) eine Bedingung für die Auflösbarkeit von algebraischen Gleichungen anzugeben und die Grundzüge der Gruppentheorie zu entwickeln.

Mit dem seit 1939 erschienen *Èléments de Mathématique* der Mathematikergruppe Bourbaki wurden die verschiedenen Bereiche der Mathematik unter

[1] vgl. Kropp 1968, S. 17ff. und Popp 1968, S. 17ff.
[2] deutsch: Wiederherstellung und Ausgleich
[3] vgl. Andelfinger 1985, S. 41 f.

dem Gesichtspunkt der Axiomatik zusammengefasst. Damit bekam die Algebra eine fundamentale Stellung im Bereich der Mathematik, den sie auch heute noch besitzt.

1.2. Historische Entwicklung der Schulalgebra

Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts waren die Inhalte des Mathematikunterrichts in den Schulen nicht normiert. Der Unterricht war vor allem Rechenunterricht und „*eine weitgehend lose Aufgabenfolge*" (Andelfinger 1985, S. 21). Mit der Unterrichtsverfassung der Gymnasien und Stadtschulen von Preußen im Jahr 1816 wurde erstmalig eine nach thematischen Bereichen aufgebaute Stoffordnung für drei Bildungsstufen angegeben. In der untersten Bildungsstufe, die 2 Jahre umfasste, sollten erste Elemente der Buchstabenrechnung, in der mittleren Bildungsstufe (3 Jahre) Gleichungen 1. und 2. Grades und in der oberen Bildungsstufe (5 Jahre) die Theorie der Gleichungen behandelt werden.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts wurde die Volksschule von der Entwicklung in den höheren Schulen abgekoppelt; in ihr dominierte das „*Regelrechnen*". Lediglich die Einführung von sogenannten „*arithmetischen Gleichungen*" in den bis 1958 erschienen Volksschulplänen sorgte für eine beginnende Algebraisierung[4].

Mit Martin Ohm (1792-1872) und seinen Lehrbüchern wurde eine formal-systematische Arithmetik für das Gymnasium entwickelt. Mit Hankels „*Prinzip der Permanenz formaler Gesetze*" (1867): „*Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Größen zu bezeichnen und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen.*" (zitiert n. Andelfinger 1985, S. 27) wurden ab 1900 die arithmetischen Rechengesetze mit Buchstaben als allgemeine Zahlen formuliert; das Lösen von Gleichungen blieb allerdings ein eigenständiges Gebiet, in dem Buchstaben Unbekannte waren.

Vor 1960

1905 wurde mit der „*Meraner Reform*", initiiert von Felix Klein (1849-1925) versucht, die fortentwickelten, fachwissenschaftlichen Erkenntnisse in den mathematischen Unterricht einfliessen zu lassen; der Funktionsbegriff wurde zu einem Leitbegriff[5]. Die Betrachtung von „*Veränderlichkeiten*" beim Einsetzen von verschiedenen Zahlen in Buchstabenausdrücke sowie eine stärkere Verknüpfung von Arithmetik und Algebra einerseits und Algebra und Funktionsbetrachtung andererseits[6] sollten in der Schule behandelt werden. Weidig (1994) beschreibt in diesem Zusammenhang, dass in den zwanziger Jahren Zahlenrätsel der übliche Einstieg in die Gleichungslehre waren. Die zu den Zahlenrätseln gehörenden Gleichungen wurden „*Bestimmungsgleichungen*" genannt und

[4] vgl. Andelfinger 1985, S. 37
[5] vgl. Vollrath 1994, S. 6
[6] vgl. Andelfinger 1985, S. 30

„*nach x aufgelöst*“. x war damit die Lösung der Gleichung. Als Veranschaulichungsmodell wurde das Waagemodell benutzt.

Die Ideen der Meraner Konferenz setzten sich in den Lehrplänen und Lehrbüchern der dreißiger Jahre durch und bestimmten im wesentlichen den Unterricht bis in die fünfziger und sechziger Jahre.

Im Folgenden werden immer wieder Ausschnitte von Schulbüchern präsentiert, die exemplarisch zeigen sollen, wie der Bereich der Algebra und insbesondere die Gleichungslehre unterrichtlich behandelt wurden. Da Schulbücher in den entsprechenden Bundesländern genehmigungspflichtig sind und dies in Bezug auf die geltenden Lehrpläne und Richtlinien erfolgt, kann davon ausgegangen werden, dass diese in aller Regel den faktischen Lehrplan repräsentieren[7]. Insofern sollen diese Ausschnitte dazu dienen, exemplarisch das unterrichtliche Geschehen darzustellen.

Am Inhaltsverzeichnis des Schulbuchs Breidenbach-Kielhorn Mathematik 3 für das 7. Schuljahr aus dem Jahre 1963 ist zu ersehen, was unter unsystematischer Behandlung des Lösens von linearen Gleichungen verstanden werden kann. In einzelne Paragraphen unterteilt werden Gleichungstypen behandelt, die eine Schwierigkeitsstufung erkennen lassen, deren Lösungen aber alle durch „Ausgucken“ zu bestimmen sind.

5. Gleichungen	**45**
§ 22. Der Gleichungstyp x + 2 = 5 und der Gleichungstyp x – 1 = 3	45
§ 23. Der Gleichungstyp 2x = 6	46
§ 24. Der Gleichungstyp x– 1 – 2=4	47
§ 25. Der Gleichungstyp x+2 – 5=6	48
§ 26. Der Gleichungstyp 2x – 1 = x + 5	49

Abbildung 1: Breidenbach-Kielhorn 3, 1963, Inhaltsverzeichnis

Der Gleichungstyp wird durchvariiert und in den dazu gehörenden Abschnitten werden Lösungsverfahren (Lösungsregeln) für diese einzelnen Aufgabentypen entwickelt.

In der Einführung zum Bereich Gleichungen wird das Waagemodell präsentiert und damit die additiven Umformungsregeln (Subtrahieren auf beiden Seiten der Zahl 2, Addieren auf beiden Seiten der Zahl 1) exemplarisch dargelegt. Danach

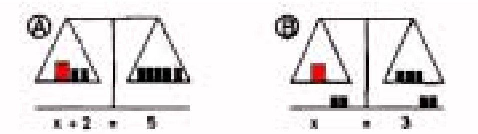
[7] In meiner beruflichen Tätigkeit als Schulbuchlektor zeigte sich, dass für eine solche Genehmigung zwar das formale Einhalten der Lehrpläne wichtig war, entscheidend aber das Gutachten der verschiedenen Gutachter war. Diese Gutachter waren in aller Regel Lehrerinnen und Lehrer, so dass es die Intention des Schulbuchverlages - diese Schulbücher sollten ja gekauft werden - auch immer war, eine möglichst große Gruppe der Lehrerinnen und Lehrer und insbesondere die im Vorhinein anonymen Gutachter anzusprechen. Inwieweit dies für die fünfziger bis siebziger Jahre auch galt, kann ich nicht mit Bestimmtheit sagen, lässt sich aber vermuten.

kommen fünf Aufgaben in Form von Textaufgaben, die dem üblichen Einstieg über Zahlenrätsel entsprechen und durch Raten gelöst werden sollen. Danach folgt eine rein syntaktische Aufgabe zum Kalkülrechnen.

5. Gleichungen

§ 22. Der Gleichungstyp $x + 2 = 5$ und der Gleichungstyp $x - 1 = 3$

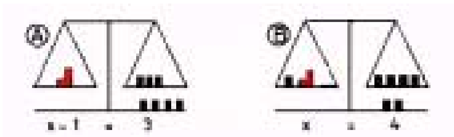
1. Die Gleichung $x + 2 = 5$ kann man an einer Waage darstellen und lösen (Abb. 14). Erkläre die Bilder! (■ = Klotz von unbekanntem Gewicht,
■ = 1-kg-Stück)



Lösung der Gleichung
$x + 2 = 5$
Ich subtrahiere auf beiden Seiten 2 und erhalte
$x = 3$

Abb.14

2. Die Gleichung $x - 1 = 3$ ist in Abb. 15 A dargestellt. Auf der linken Schale steht ein Klotz von unbekanntem Gewicht, aus dem ein Stück herausgebrochen ist, das 1 kg wiegt. Auf der rechten Schale stehen drei 1-kg-Stücke. Erkläre Bild B!



Lösung der Gleichung
$x - 1 = 3$
Ich addiere auf beiden Seiten 1 und erhalte
$x = 4$

Abb.15

Übungen

Löse die folgenden Aufgaben durch Raten! Schreibe sie dann als Gleichungen und löse diese auf, indem du sie zuvor in das Bild der Waage übersetzt! Schreibe den vollen Lösungstext hin!

1. Addiert man zu einer Zahl 4, so erhält man 9.
2. Addiert man 25 zu einer Zahl, so erhält man 40.
3. Welche Zahl muß man zu 45 addieren, um 102 zu erhalten?
4. Wenn man von einer Zahl 7 subtrahiert, erhält man 8.
5. Wenn man von einer Zahl 17 subtrahiert, erhält man 15.
6. a) $98 + x = 156$ b) $x + 15 = 34$ c) $x - 37 = 43$

Abbildung 2: Breidenbach-Kielhorn 3 , 1963, S. 45

Im gesamten Band für die 7. Jahrgangsstufe werden fünf Seiten von insgesamt 121 Seiten dem Lösen oben angegebener Gleichungstypen gewidmet. Dass solch eine Einführung unter didaktischen Gesichtspunkten problematisch ist und eine entsprechende Kritik berechtigt ist, wird in den folgenden Kapiteln ausführlich begründet.

Im Verlauf des 8. Schuljahres wird der Bereich der Gleichungslehre wieder aufgegriffen. Auf Seite 46 des Schulbuchs werden unter der Überschrift "Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten" eine Reihe von Übungsaufgaben mit Formvariablen gestellt.

4. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten

§ 19. Zahlenaufgaben

Ganzzahlige Vorzahlen

1. $23x - 12a + 15x = 17a + 18x + 11a + 10x$
2. $24x - 41b + 19x = 11b + 42x - 16b - 5x$
3. $18x + 15a - 11x - 11a + 3x - 4a = 7x + 15a$
4. $5x + 13b + 14x - 8b = 15b + 6x + 29b$

5. $52x + 69a - 33x + 10a - 8x = 18x + 41a - 11x + 18a$
6. $111b - 74x - 38b - 35x - 60b + 29x + 3b = 0$
7. $84x + 13a^2 - 7b - 23x + 19b - 41a = 12b + 47x$
8. $92 - [(35x + 19) - (28 - 52x)] = 48 - (93x - 95)$

9. $x - [2x - (3x - 11) + (4x + 13) - (5x - 15)] = 0$
10. $65x - [(41x + 94) - (18x - 45)] = 38x - 67$
11. $8x - 70 + [15x - 52 - (19x - 34)] = 44$
12. $58 - [14x - (52x - 125)] = 27x - [13 + (x - 42)]$

13. $24x - [13x - (14x + 35)] = 65 + [(12x + 19) - (7x - 31)]$
14. $100x - [16x + (25x - 17)] = 100 + [(26x - 37) - (30x - 17)]$
15. $74x + [49x - (63x - 95)] = 219 - [53 + (46 - 35x)]$
16. $18x - [43a - (62x + 37a)] = 49a - [12x + (15a - 72x)]$
17. $(31x - 16a + 27b) - [22x - (6a - 14b - 11x)] = 13b - 4x$

1.3 Gleichungen mit Brüchen

Beispiele.

1. $\frac{x - 3}{18} - \frac{2x + 7}{8} = \frac{2}{9}$

a) Hauptnenner = 72
b) Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert
$4x - 12 - 18x - 63 = 16$
$-14x = 91$
$x = -\frac{13}{2}$

2. $\frac{4x + 1}{4x + 2} - \frac{5x - 2}{6x + 3} = \frac{5}{18}$

a) Faktorenzerlegung der Nenner:
$4x + 2 = 2\,(2x + l)$
$6x + 3 = 3\,(2x + l)$
$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$
b) Hauptnenner = $18 \cdot (2x + 1)$
c) Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert
36x + l 9—30x + 12 = 10x + 5
$-4x = -16$
$x = 4$

Abbildung 3: Breidenbach-Kielhorn 4, 1963, S. 46

Auf der folgenden Seite stehen insgesamt 38 Bruchgleichungen als Aufgabenblock.

Auf den Seiten 48 und 49 wird unter der Überschrift „Eingekleidete Aufgaben“ anhand von Beispielen in das Lösen von Bruchgleichungen eingeführt. Für Bruchgleichungen wird ein Schema dargestellt, wie aus Textaufgaben in Form von Zahlenrätseln die entsprechenden Gleichungen gebildet werden.

Die eigentliche Gleichung wird dann im Schulbuch nicht mehr gelöst, sondern die Lösung wird nur angegeben. Das Schema beinhaltet außerdem die Probe. Die darauf folgende Seite besteht aus Übungsaufgaben zu Bruchgleichungen und wird dann durch vier Seiten Textaufgaben mit der Überschrift "Eingekleidete Aufgaben" komplettiert.

Aufgabe. Die Summe zweier Zahlen ist 11. Addiert man das Dreifache der ersten Zahl zum Vierfachen der zweiten Zahl, so erhält man 39.

Lösung. Ich bezeichne die erste Zahl mit x. (Benutze weiterhin das folgende Schema!)

1. Zahl	x	3x	Probe: 5	15
2. Zahl	11 – x	4(11 – x)	6	24
Summe	11	39	11	39

$$3x + 4\,(11 - x) = 39$$
$$x = 5$$

Abbildung 4: Breidenbach-Kielhorn 4, 1963, S. 48

Aufgabe. Der Nenner eines Bruches ist um 7 größer als der Zähler. Addiert man zum Zähler 3 und zum Nenner 4, so entsteht ein Bruch vom Wert $\frac{1}{2}$.

Lösung. Ich bezeichne den Zähler des Bruches mit x.
(Benutze weiterhin das folgende Schema!)

Zähler	x	x + 3	Probe: 5	8
Nenner	x +7	x + 11	12	16
Bruch	$\frac{x}{x+7}$	$\frac{x+3}{x+11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

$$\frac{x+3}{x+11}=\frac{1}{2}$$
$$\underline{x=5}$$

Abbildung 5: Breidenbach-Kielhorn 4, 1963, S. 49

Im Band für die 7. Jahrgangsstufe werden als Einführung in die Gleichungslehre verhältnismäßig leichte Aufgaben behandelt, während beim Wiederaufgreifen in der 8. Jahrgangsstufe bereits Formvariablen verwendet werden und danach sofort Bruchgleichungen behandelt werden. Insgesamt ist deutlich, dass der Kalkülanteil sehr hoch ist. Dieses Schulbuch ist sicherlich als typisch für die Zeit anzusehen.

Zusammenfassung:
Kennzeichnend für den Bereich der Schulalgebra und insbesondere für die Gleichungslehre bis zur Reform des Mathematikunterrichts ist die unsystematische Behandlung mit ausschließlicher Betonung des Kalküls. Die Einführung der Gleichungslehre wird mit Hilfe von Zahlenrätseln durchgeführt. Verschiedene Schemata zur Übersetzung von eingekleideten Aufgaben in Gleichungen werden exemplarisch vorgestellt. Danach dominieren viele syntaktische Aufgaben und eine Menge von Textaufgaben. Malle bezeichnet die damit verknüpfte Lernauffassung mit „Übungsideologie“[8].

[8] vgl. Malle 1993, S.19 ff.

Reform des Mathematikunterrichts

Unter dem Eindruck der 1960 von der OECD in Auftrag gegebenen „*synopses for modern secondary school mathematics*“[9] und den Arbeiten der Forschergruppe Bourbaki wurden 1968 die „*Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den Allgemeinbildenden Schulen*“ der Kultusministerkonferenz (vgl. ebd. S. 172-186) verabschiedet. Diese prägten die Schulbücher und Lehrpläne der Bundesländer in den siebziger Jahren.
Für die Algebra bedeutete dies u. a. „- *eine stärkere Betonung der grundlegenden Regeln in den einzelnen Zahlbereichen (Axiomatik), - die Betrachtung neuer Verknüpfungen in den Zahlbereichen, - die schrittweise Erarbeitung grundlegender Strukturbegriffe (...), - eine völlige Neugestaltung der Lehre von den Termen, Gleichungen und Ungleichungen mit den Begriffen der Mengenlehre und der Logik, - eine Präzisierung des Funktionsbegriffs unter Rückgriff auf den Begriff der Relation*“ (Vollrath 1994, S. 7f.).
Im Bereich des Gleichungslösens hatte das Verwenden von Begriffen aus der Logik und der Mengenlehre die Folge, dass ein wenn auch einheitlicher aber aufwendiger Begriffsapparat (Variable, Term, Gleichung, Aussage, Aussageform, Grundmenge, Lösungsmenge, Äquivalenzumformung) in den Unterricht einzog. *„Für die gesamte Gleichungslehre tragend sind vor allem die Begriffe »Aussage«, »Aussageform«, »Gleichung«, »Term«, »Variable« bzw. »Leerstelle«, »Grundmenge« und im Zusammenhang damit die Begriffe »Lösungsmenge einer Aussageform bzw. einer Gleichung bezüglich einer Grundmenge« und »Definitionsbereich eines Terms bezüglich einer Grundmenge«. Auf diese Begriffe und auf die sich daraus ergebenden Unterscheidungen für Gleichungen (allgemeingültige Gleichungen, Bedingungsgleichungen und unerfüllbare Gleichungen bezüglich einer Grundmenge) sollte man meines Erachtens auf keinen Fall verzichten.“* (Lauter 1964, S.114). Damit ging es nicht mehr allein um das Lösen von Gleichungen, sondern um das korrekte aussagenlogische Formulieren.

Begründung für diese „neue Gleichungslehre“ war die Hoffnung, Schwächen der klassischen Gleichungslehre zu vermeiden. Diese waren unter anderem[10] das Ignorieren der Sonderfälle Gleichung mit allgemeiner Lösung und Gleichung mit keiner Lösung, das Vernachlässigen der Grundmenge, die unzureichende Begründung der Umformungsregeln, die Vernachlässigung von Ungleichungen und insbesondere die bisherige Überbetonung der Umformungstechniken, des Kalküls.

Vollrath weist im Zusammenhang mit dem Vernachlässigen der Grundmenge beim Gleichungslösen darauf hin, dass das Problem keiner bzw. mehrerer Lösungen bei der klassischen Behandlung erstmals bei quadratischen Gleichungen auftritt und ohne Einsicht in die Abhängigkeit der Lösungsmenge von der Grundmenge „*ein Verständnis für das Problem der algebraischen*

[9] vgl. Delegierten der Ständigen Konferenz der Kultusminister bei der OECD 1974
[10] vgl. Vollrath 1974, S. 91 ff. und Vollrath 1994, S.184 ff.

Gleichungen und Zahlbereichserweiterungen überhaupt nicht möglich“ (Vollrath 1974, S. 92) ist.

Entsprechendes gilt für die Umformungsregeln, die z. B. bei Wurzelgleichungen, die Probe notwendig machen, um zu entscheiden, „*welche der Zahlen tatsächliche Lösungen der Ausgangsgleichung waren*“ (Vollrath 1974, S. 93). „*Indem man den Schülern von vornherein die logische Struktur von Umformungen bewußt macht, wird diese Schwierigkeit vermieden.*“ (Vollrath 1974, S.93).

Als wesentliche Ziele wurden bei der Reform des Mathematikunterrichts und entsprechend für die „neue Gleichungslehre“ immer wieder die „*Forderung nach Klarheit und Präzision der Begriffe unter Ausnutzung der Forschungsergebnisse der modernen Mathematik insbesondere der Grundlagenforschung*" (Wäsche 1964, S.6) geltend gemacht.

Um den Diskussionsstand in der Mathematikdidaktik exemplarisch zu beschreiben, soll folgendes Zitat von Wolff anlässlich der Festschrift für Wilhelm Oehl (1976) dienen: „*Die von Lauter zitierte Argumentation <<Wir nehmen an,* G_1 (gemeint ist die Gleichung G_1: $x^2 - x + 2 = 0$, der Verf.) *habe eine Lösung, wir wollen sie mit* x_0 *bezeichnen ...>> ist natürlich sinnlos. Sinnvoll und korrekt dagegen ist: <<Wir nehmen an,* G_1 *habe eine Lösung. Wir denken uns eine solche beliebig, aber fest gewählt und bezeichnen diese mit* x_0 *...>> Hier ist einwandfrei – gemäß der von Lauter genannten ersten Deutung - <<*x_0*>> ein Name einer bestimmten Lösung – und* G_2 (gemeint ist die Gleichung G_2: $x_0^2 - x_0 + 2 = 0$, der Verf.) *eine hypothetisch wahre Aussage. Demnach ist einem, der nach dem Lauterschen Zitat argumentiert, nicht vorzuwerfen, er gebrauche die Konstante <<*x_0*>> in sinnloser Weise. Zu kritisieren ist vielmehr, daß in der Formulierung des Lösungsweges der geistige Akt des Fixierens einer Lösung unterschlagen wird.*“ (Wolff 1976, S. 190). Wolff erscheint die Lautersche Argumentation „ *- jedenfalls für den Schulunterricht – problematisch und – aus logischen und psychologischen Gründen – wenig empfehlenswert zu sein.*“ (ebd. S. 190).

Folgende zwei Schulbuchausschnitte sollen für die „neue Gleichungslehre“ stehen. Anhand dieser Ausschnitte ist zu sehen, in welcher Form in Schulbüchern der Formalismus deutlich in den Vordergrund rückte und gleichzeitig versucht wurde, die Sonderfälle Gleichung mit allgemeiner Lösung und Gleichung mit keiner Lösung miteinzubeziehen.

Im Kapitel 4 „Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen“ des Schulbuchs Schröder/Uchtmann „Einführung in die Mathematik für allgemeinbildende Schulen Algebra 1“ aus dem Jahr 1968 werden zuerst Umformungen von Aussageformen behandelt und anhand dieser Lösungsmenge und Grundmenge thematisiert und für Gleichungen und Ungleichungen die Lösungsmenge mit entsprechender Notation bestimmt. Danach werden Termumformungen behandelt und Umformungssätze für Gleichungen und Ungleichungen formuliert.

Folgendes Beispiel steht unter dem Abschnitt „einfache Textaufgaben“ und soll den Formalismus beim Lösen von Gleichungen veranschaulichen.

Beispiel 1:

Multipliziert man eine natürliche Zahl mit 5 und addiert 7, so erhält man 22. Wie heißt die natürliche Zahl ?
Diese Angaben können wir in mathematische Zeichen übertragen. In unserem Beispiel treten ein Produkt (multipliziert man . . .) und eine Summe (. . . addiert . . .) auf.
Wir lassen für die Einsetzung von Zahlen in dem Produkt eine leere Stelle, die wir durch die Variable x kennzeichnen, bilden also das Produkt aus x und 5 und erhalten 5x. Dazu soll 7 addiert werden. Da die Summe 5x + 7 gleich 22 sein soll, ergibt sich die Gleichung

$$5x + 7 = 22 \,.$$

Wir können nun berechnen, welche Zahlen für x aus der Gleichung eine wahre Aussage machen. Da eine natürliche Zahl gesucht ist, lautet die Aufgabe:

$$\mathbb{L} = \{x \mid 5x + 7 = 22\}_{\mathbb{N}}$$

$$5x + 7 = 22 \Leftrightarrow 5x = 15$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$
$$\mathbb{L} = \{3\}$$

Ergebnis: Die gesuchte natürliche Zahl heißt 3.

Abbildung 6: Schröder/Uchtmann: Einführung in die Mathematik für allgemeinbildende Schulen Algebra 1, 1968, S.72 f

Im Schulbuch Lambacher/Schweizer „Algebra1“ von 1966 werden im Kapitel 1 „Wiederholungen und Ergänzungen; natürliche Zahlen“ nach der ausführlichen Behandlung von Mengen die Rechengesetze für die vier Grundrechenarten in der Menge der natürlichen Zahlen mit Variablen und Termen formuliert. Nach der Behandlung von Aussagen und Aussageformen wird dann auf folgende Art in Lösungsverfahren bei Gleichungen und Ungleichungen eingeführt.

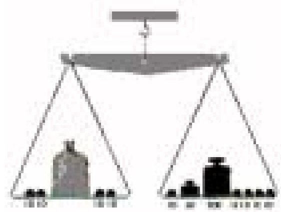
Man führt die gegebene Gleichung in eine einfachere Gleichung über, indem man auf *beiden Seiten der Gleichung dieselbe natürliche Zahl addiert oder subtrahiert bzw. mit derselben natürlichen Zahl multipliziert oder dividiert.*
Man kann dieses Verfahren mit Hilfe einer *Waage* veranschaulichen (Fig. 33.1):

Wenn der Sack *x* Gramm wiegt und die Waage „spielt", so ist die Gleichung erfüllt:

$$x + 40 = 300$$

Sie spielt auch noch, wenn man beiderseits 40 g wegnimmt:

$$x + 40 - 40 = 300 - 40$$
$$x = 260$$



Man dürfte beiderseits auch Gleiches hinzufügen, beide Seiten verdoppeln, halbieren usw.

Weitere Beispiele ($G = \mathbb{N}_0$):

1) $x - 18 = 42$	2) $5y = 90$	3) $x + 36 = 20$
$x - 18 + 18 = 42 + 18$	$5y : 5 = 90 : 5$	$x + 36 - 20 = 0$
$x = 60$	$y = 18$	$x + 16 = 0$
Ergebnis: $L = \{ 60 \}$	*Ergebnis*: $L = \{18\}$	*Ergebnis*: $L = \emptyset$

Abbildung 7: Lambacher/Schweizer: Algebra 1 (Gymnasium), 1966 S. 33f.

Unter der Abschnittsüberschrift „Addition und Subtraktion von Termen bei Gleichungen“ wird dann das Lösungsverfahren wie folgt erweitert.

Man führt eine gegebene Gleichung in eine einfachere Gleichung über, indem man *beiderseits einen passenden Term addiert oder subtrahiert.*

Weitere Beispiele: (Es soll $G = \mathbb{N}_0$ und $L \subseteq \mathbb{N}_0$ sein.)

4) $5x - 7 = 3x + 5$	5) $8x - 16 = 20 - 4x$	6) $4 = 13 - 7x$
7 addieren: $5x = 3x + 12$	$8x = 36 - 4x$	$7x + 4 = 13$
3x subtrahieren: $2x = 12$	$12x = 36$	$7x = 9$
durch 2 dividieren: $x = 6$	$x = 3$	ist bezügl. $\mathbb{N}_0$ unerfüll-
Ergebnis: $L = \{6\}$	Ergebnis: $L = \{3\}$ Probe!	bar, also Ergebnis $L = \emptyset$

Probe zu 4): Wir bezeichnen den Term $5x - 7$, also die linke Seite der Gleichung, mit $T_1(x)$, die rechte Seite mit $T_2(x)$. Und wir bezeichnen die Zahlen, in die $T_1(x)$ bzw. $T_2(x)$ übergehen, wenn an Stelle von x die Zahl 6 gesetzt wird, mit $T_1(6)$ und $T_2(6)$. Die Zahl 6 ist Lösung der Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$, wenn $T_1(6) = T_2(6)$ ist. Wir berechnen also $T_1(6) = 5 \cdot \mathbf{6} - 7 = 23$; $T_2(6) = 3 \cdot \mathbf{6} + 5 = 23$; die Zahl 6 ist somit Lösung.

Abbildung 8: Lambacher/Schweizer: Algebra 1 (Gymnasium), 1966 S. 34

Vollrath beschreibt 1974, wie „*ein Unbehagen an übertriebenen begrifflichem Aufwand wieder zu einer stärkeren Beachtung des Kalküls beim Behandeln der Gleichungslehre geführt*“ (Vollrath 1974, S.90) hat. Er sieht den Ansatz der „*Reformbestrebungen mit mengentheoretischen Betrachtungen weitgehend semantisch*“ (Vollrath 1974, S. 91), während bis dahin die Gleichungslehre syntaktisch orientiert war. Durch die Verwendung von Operatoren wird nach Vollrath allerdings das „*Gleichgewicht zwischen beiden Aspekten im Mathematikunterricht*“ (Vollrath 1974, S. 91) wieder hergestellt.

Malle[11] bezeichnet die Lernauffassung im Sinne der „neuen Gleichungslehre“ als „Erklärungsideologie“.

Bei der Stofforganisation verlangt Vollrath (1974): „*Für die Gleichungs- und Ungleichungslehre ist ein sorgfältiger Aufbau notwendig. Versagen trotzdem einzelne Schüler, so hat der Lehrer die Möglichkeit, auf Unterrichtsprogramme zurückzugreifen, die es dem Schüler gestatten, selbständig seine Lücken zu beseitigen.*“ (Vollrath 1974, S. 98).

Schon bei Vollrath (1974) wird der Widerspruch zwischen Lehrersicht und Schülersicht deutlich. Aus mathematisch-inhaltlicher Sicht stellt die „neue Gleichungslehre“ und das gesamte Gebiet der Algebra einen in sich geschlossenen, logisch ableitbaren und dementsprechend klar gegliederten und verständlichen Bereich der Mathematik dar.

Nicht umsonst wird in diesem Zusammenhang üblicherweise auf Bruners Hypothese „*Jedes Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in*

[11] vgl. Malle 1993, S. 19ff.

einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden“ (Bruner 1970, S. 44) und das didaktische Prinzip der Curriculumspirale verwiesen. Diese mathematisch-inhaltliche Sicht, insbesondere, da sie sich in den Schulbüchern niedergeschlagen hat, kann man sicherlich als eine „typische“ Lehrersicht beschreiben. Auf der anderen Seite zeigt sich, dass Schülerinnen und Schülern gerade in diesem Bereich häufig scheitern.

Zusammenfassung:
Kennzeichend für die „neue Gleichungslehre“ ist das Aufblähen des Begriffsapparates, wobei insbesondere den Begriffen Aussage und Aussageform eine zentrale Bedeutung zukommt. Außerdem ist das gleichzeitige Behandeln von Gleichungen und Ungleichungen und das Beachten von Grund- und Lösungsmenge aus Gründen der Stoffsystematik charakteristisch. Obwohl ein entscheidendes Ziel das Betonen des semantischen Aspektes und damit der mathematischen Begrifflichkeit war, führte die Reform zu einer deutlichen Verstärkung der Syntax mit einer Ausdehnung der Notation (Äquivalenzzeichen, Mengenschreibweise usw.). Malle bezeichnet die damit verknüpfte Lernauffassung treffend mit „Erklärungsideologie“.

Nach der Reform

Aufgrund unbefriedigender Unterrichtserfahrungen wurde die Reform in den achtziger und neunziger Jahren immer weiter zurückgenommen, insbesondere die Gleichungslehre begrifflich vereinfacht und sowohl die Zahlbereiche als auch der Bereich der Funktionen mit mehr Anschauung versehen.

Trotzdem lassen sich Überbleibsel an verschiedenen Stellen immer wieder erkennen. Insbesondere zeigt sich das am Festhalten an der Behandlung von den Begriffen Aussage und Aussageform.

Die Abkehr geschieht sehr langsam, was eventuell mit der Situation erklärbar ist, dass nicht Ende der siebziger Jahre, als die Kritik an den Auswüchsen der Reform längst formuliert war, alle Lehrpläne und insbesondere die Schulbücher neu überarbeitet waren oder wurden.

An der Neubearbeitung des Schulbuchs Breidenbach Mathematik 8. Schuljahr für Realschulen aus dem Jahre 1979 ist diese langsame Abkehr von der Reform erkennbar.

Auffällig ist z. B., dass die Lösungsmenge noch notiert wird.

3. Einfachste Gleichungen (Lösung in $\mathbb{Q}$)

Bei einer Gleichung in der Grundform „sieht" man die Lösung unmittelbar. Bei den nächst schwierigeren Gleichungen muß man eine kleine Überlegung anstellen, um die Lösung zu finden.

a) Es soll in $\mathbb{Q}$ die Lösungsmenge der Gleichung $x+3=9$ gefunden werden. Das heißt: Man soll aus $\mathbb{Q}$ diejenige Zahl auswählen, die zusammen mit 3 eine Summe vom Wert 9 ergibt. Nun, jedermann „weiß", daß das die Zahl 6 ist. Tatsächlich ist ja auch $6+3=9$.

b) Unsere Aufgabe ist eine andere: nämlich einen Rechenvorgang anzugeben, durch den man die Gleichung $x+3=9$ in die Grundgleichung $x=6$ überführen kann. Der Rechenvorgang ist offenbar dieser: Man muß

von beiden Seiten der Gleichung $x+3=9$
3 subtrahieren; dann erhält man $x+3-3=9-3$
oder zusammengefaßt die Grundform $x=6$.

c) Man schreibt den Lösungsweg kurz so:

$$\begin{aligned} x+3&=9 \quad |-3\\ x+3-3&=9-3\\ x&=6\\ L&=\{6\}\end{aligned}$$

Kontrolle. $6+3=9$ (w).

oder noch kürzer:

$$\begin{aligned} x+3&=9 \quad |-3\\ x&=6\\ L&=\{6\}\end{aligned}$$

Kontrolle. $6+3=9$ (w).

d) Kontrolliere die folgenden Lösungsschritte in der Kurzschreibweise.

(1) $x-3=9 \quad |+3$
$x=12$
$L=\{12\}$
Kontrolle. $12-3=9$ (w)

(2) $x\cdot 3=9 \quad |:3$
$x=3$
$L=\{3\}$
Kontrolle. $3\cdot 3=9$ (w)

(3) $\frac{x}{3}=9 \quad |\cdot 3$
$x=27$
$L=\{27\}$
Kontrolle. $\frac{27}{3}=9$ (w)

Abbildung 9: Breidenbach Mathematik 8. Schuljahr, 1979, S. 55

Die Intention der Autoren wird allerdings in den methodischen Hinweisen der Lehrerausgabe wesentlich deutlicher:

Mit Absicht wird der allgemeinen Theorie der Äquivalenzumformungen auf den folgenden 3 Seiten die Lösung einfachster Gleichungen vorausgeschickt. Die Ausführungen nehmen eine Mittelstellung ein zwischen der naiven Lösung in den vorausgegangenen Schuljahren und der „vollen Theorie". Das tut dem schwachen Schüler sicher gut. Außerdem will es mir mehr als komisch scheinen, daß wir plötzlich übergangslos so tun sollen, als könne der Schüler Gleichungen wie $x + 2 = 6$ oder $4 \cdot x = 12$ nicht lösen, ehe er von Äquivalenzumformungen gehört hat. Das ist doch einfach nicht wahr. Wenn der alte Grundsatz: „An Bekanntes anknüpfen!" noch wahr ist — und er ist es und wird es immer bleiben, - dann müssen wir an die bisherige Art der Lösung von Gleichungen anknüpfen. „Anknüpfen" heißt nicht: dabei stehen bleiben, sondern fortschreiten. Fortschreiten natürlich in die Richtung der Äquivalenzumformungen.

Wie das im einfachsten Fall geschehen kann, ist in Nr. 3 ausgeführt. Selbstverständlich sind die Ankündigungen der vorzunehmenden Operation das Wichtigste. Auch die Notierung dessen, was man machen will, der senkrechte Strich mit Angabe des Operators, dürfen nicht vernachlässigt werden. Auch daß der Operator auf beide Seiten der Gleichung einwirken muß, ist herauszuarbeiten. Es ist also nicht so, als wäre an dieser Stelle nichts zu tun. Wir führen gewisse Formalismen ein, deren Berechtigung wir auf den ersten Blick „sehen" (einsehen), ohne einer großen Theorie zu bedürfen. Denn die Kontrolle — die niemals fehlen sollte! — zeigt uns eindeutig, ob wir richtig geschlossen und richtig gerechnet haben.

Bei ungenügender Behandlung gibt es Schüler, die in $x + 9 = 2$ der Meinung sind, die eine 2 rechts werde von der 9 links abgezogen und nicht auch rechts.

Abbildung 10: Breidenbach: Mathematik 8, 1979, S. 55 L

Interessant ist in diesem Schulbuch das Präsentieren eines Algorithmus in Form eines Flußdiagramms für das Lösen einfacher Gleichungen. Dies scheint einer allgemeinen Forderung nach deutlicherer Betonung des Kalküls entgegenzukommen und gleichzeitig die Diskussion um die Behandlung von Informatikanteilen wieder zu spiegeln.

4. Lösung einfacher Gleichungen in Q

Erstes Beispiel

$70 - 2x = 7x - 11 \quad | +2x$

Ich addiere auf beiden Seiten 2x.

$\Leftrightarrow 70 = 9x - 11 \quad | +11$

Ich addiere auf beiden Seiten 11.

$\Leftrightarrow 81 = 9x \quad | : 9$

Ich dividiere beide Seiten durch 9.

$\Leftrightarrow 9 = x$

$\mathbb{L} = \{9\}$

Kontrolle. 70-18 = 63 -11 (w).

Zweites Beispiel

$4x - 12 = 16 - 3x \quad | + 3x$

$\Leftrightarrow 7x - 12 = 16 \quad | + 12$

$\Leftrightarrow \quad 7x = 28 \quad | : 7$

$\Leftrightarrow \quad x = 4$

$\mathbb{L} = \{4\}$

Kontrolle. 16-12=16-12 (w).

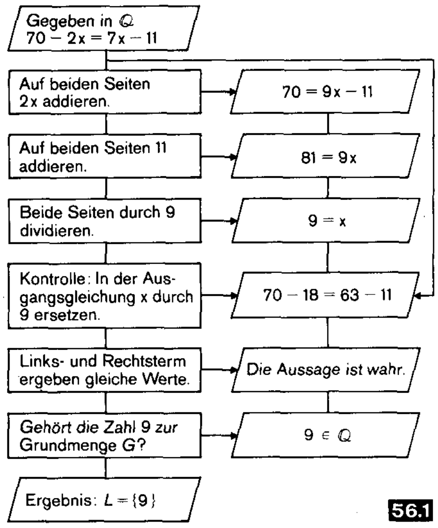


Abbildung 11: Breidenbach: Mathematik 8. Schuljahr, 1979, S. 56

Im Weiteren wurden zunehmend der Begriffsapparat aus der Mengentheorie und der Aussagenlogik zurückgedrängt. Nichtsdestotrotz ist dieser bei der Behandlung der Gleichungen aber auch heute noch vorhanden, wenn auch nicht mehr im Vordergrund. Dies soll anhand des Schulbuchs Lambacher/Schweizer exemplarisch verdeutlicht werden.

Auf Seite 38 des Mathematikschulbuches für Gymnasien Lambacher/Schweizer 8 in der Niedersachsenausgabe von 1993 wird im Kapitel „Äquivalenzumformungen von Gleichungen und Ungleichungen“ nach der ausführlichen Behandlung von Termen in einem eigenständigen Kapitel folgender Merksatz formuliert:

Die für die Reform charakteristischen Begriffe Aussage, Aussageform, Grundmenge und Lösungsmenge sind halbfett gedruckt. Dadurch wird der immer noch sehr große Stellenwert deutlich.

Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen sind **Aussageformen;** sie gehen bei Belegung der Variablen mit einer Zahl aus einer **Grundmenge G** in eine wahre oder falsche **Aussage** über. **Lösungen** sind die Zahlen aus G, für die eine wahre Aussage entsteht. Die Menge aller Lösungen heißt **Lösungsmenge L** der Gleichung (Ungleichung).

Abbildung 12: Lambacher/Schweizer 8 Niedersachsenausgabe 1993, S. 38

Beim Abschnitt „Lösungsverfahren für lineare Gleichungen“ auf Seite 42 lautet es dann wie folgt.

Gleichungen wie $5a-4=7$ oder $3(2x-\frac{1}{2})=4-2(1-x)$, in denen **nur** die erste Potenz der Variablen vorkommt (z. B. x, aber nicht x^2, x^3 usw.), heißen **lineare Gleichungen**. Manche solcher Gleichungen können wir nur dann vereinfachen, wenn wir auf beiden Seiten die gleichen Terme addieren oder subtrahieren (vgl. Beispiel). Auch diese Umformungen ändern die Lösungsmenge der Gleichung nicht, weil für Terme dieselben *Rechenregeln gelten wie für Zahlen.*

$5x+7$	$= 2x+10$	$\mid -7$	Auf beiden Seiten 7 subtrahieren
$5x$	$= 2x+3$	$\mid -2x$	Auf beiden Seiten 2x subtrahieren (Fig. 2/3)
$3x$	$= 3$	$\mid :3$	Auf beiden Seiten durch 3 dividieren
x	$= 1$		

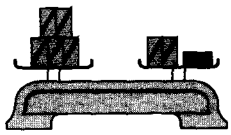


Fig. 2

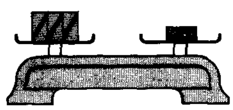


Fig. 3

Probe: linke Seite: $5\cdot 1+7=12$; rechte Seite: $2\cdot 1+10=12$; die Lösung ist also 1.

Beidseitiges Addieren oder Subtrahieren desselben Terms ist eine Äquivalenzumformung.

Enthält eine Gleichung Klammern, so löst man diese zuerst auf; dann faßt man auf jeder Seite zusammen. Auch dies sind Äquivalenzumformungen.

Beispiel:

$3(2x-\frac{1}{2})$	$= 4-2(1-x)$		Klammern lösen.
$6x-\frac{3}{2}$	$= 4-2+2x$		Auf jeder Seite zusammenfassen.
$6x-\frac{3}{2}$	$= 2+2x$	$\mid +\frac{3}{2}$	Mit Hilfe von Äquivalenzumformungen
$6x$	$= \frac{7}{2}+2x$	$\mid -2x$	bis zur einfachsten Gleichung
$4x$	$= \frac{7}{2}$	$\mid :4$	umformen.
x	$= \frac{7}{8}$		

Die Lösungsmenge $L=\{\frac{7}{8}\}$ entnehmen wir der einfachsten Gleichung $x=\frac{7}{8}$. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, geben wir sogar oft nur diese Gleichung an.

Beachte: Da alle durchgeführten Umformungen Äquivalenzumformungen sind, ist eine Probe nicht mehr notwendig (aber empfehlenswert).

Abbildung 13: Lambacher/Schweizer 8 Niedersachsenausgabe 1993, S. 42

1.3. Heutiger Stand

Es zeigt sich, dass dem Gebiet der Algebra und insbesondere dem Teilbereich der Behandlung von Gleichungen in Deutschland im internationalen Vergleich ein sehr hohes Gewicht zugemessen wird. Bei der Betrachtung von Schulbüchern und Lehrplänen wird deutlich, welch großen stofflichen Anteil dieser Bereich besitzt. Dabei ist in keiner Form berücksichtigt, inwieweit bei der Geometrie und beim Sachrechnen zusätzlich algebraische und damit kalkülhafte Anteile vorhanden sind oder gar dominieren. Sowohl in der unterrichtlichen Behandlung als auch aus Lehrersicht kann man daraus ableiten, dass Algebra das zentrale Thema in dem Mathematikunterricht der Sekundarstufe (ohne Berücksichtigung der Hauptschule) darstellt. Innerhalb der Algebra stellt neben der Behandlung von Funktionen das Lösen von Gleichungen zumindest in Klassenstufe 8 die entscheidende mathematische Tätigkeit dar.

Welchen Stellenwert besitzt die Algebra und das Lösen von Gleichungen Ende der neunziger Jahre in der Bundesrepublik Deutschland? Um diese Frage genauer zu beantworten, genügt es sicherlich nicht, wie bisher exemplarisch Ausschnitte aus Schulbüchern zu betrachten. Als Informationsquellen können die aktuellen Lehrpläne und Richtlinien der verschiedenen Bundesländer dienen. Eine weitere Möglichkeit ist auf Ergebnisse der TIMS-Studie zurückzugreifen oder die zugelassenen Schulbücher bezüglich des Anteils der Algebra zu vergleichen.

An dieser Stelle möchte ich mich lediglich auf Niedersachsen beschränken und die im Rahmen meiner Untersuchung verwendeten Schulbücher[12] betrachten und die Rahmenrichtlinien in Niedersachsen vergleichen. Ich gehe davon aus, dass damit die Situation in der gesamten Bundesrepublik gut wieder gespiegelt wird, wenn auch zu bedenken bleibt, dass es Länderunterschiede gibt. Um dieses ein wenig auszugleichen soll auf TIMSS zurückgegriffen werden, obwohl Baden-Württemberg nicht daran teilnahm. Ferner soll dies durch die Berücksichtigung der Auswertung der Realschulabschlussprüfung 1998 von Baden-Württemberg ausgeglichen werden.

Im Folgenden wird eine Auswahl von den zur Zeit gültigen Lehrplänen aus Niedersachsen mit den entsprechenden Anteilen zum Lösen von Gleichungen dargestellt. Anhand dieser Auswahl soll verdeutlicht werden, welchen Stellenwert diesem Bereich zugemessen wird[13]. Lehrpläne oder Rahmenrichtlinien sind sicherlich nur Momentaufnahmen und unterliegen sehr stark den zu der Zeit der Konzeption vorherrschenden Strömungen in der Mathematikdidaktik. Nichtsdestotrotz liefern sie wertvolle Hinweise, die ausgenutzt werden sollten.

In Folge der Diskussion im Zusammenhang mit TIMSS und dem Abschneiden der deutschen Schülerinnen und Schüler im internationalen Vergleich wird in verschiedenen Bundesländern über eine Revision des Mathematikunterrichts und damit der Lehrpläne nachgedacht.

Inwieweit sich in diesen Überarbeitungen eine stärkere Betonung des Kalküls und von Algorithmen unter dem Gesichtspunkt von Grundfertigkeiten oder eine stärkere Betonung der Anwendungsorientierung und verstärkte Forderung von projektartigen und fachübergreifenden Unterrichtsanteilen durchsetzen wird, ist zur Zeit noch nicht absehbar.

Für die Klasse 7 des Gymnasiums wird im Bereich der rationalen Zahlen in das Lösen von Gleichungen eingeführt. Dies entspricht der Forderung nach dem Verbinden der Zahlbereichserweiterungen mit algebraischen Problemen[14].

---

[12] Dies ist sicherlich nicht repräsentativ. Da aber keine Statistik über die Einführungssituation von Schulbüchern existiert und die Schulbuchverlage solche Zahlen aus verständlichen Gründen nicht veröffentlichen, erscheint mir diese Vorgehensweise legitim.
[13] Im Anhang ist eine weitere Auswahl von Lehrplänen und Richtlinien einzelner Bundesländer dargestellt.
[14] vgl. Niedersächsisches Kultusministerium (hrsg.): Rahmenrichtlinien für das Gymnasium Mathematik, 1989, S. 7

7.3 Rationale Zahlen		
Ziele	Begriffe	Hinweise
7.3.3 einfache Gleichungen und Ungleichungen in Q lösen können	Äquivalenzumformung Grundmenge Lösungselement Lösungsmenge	Gleichungen und Ungleichungen der Art $ax + b = c$, $ax + b < c$, $ax + b > c$, $ax + b \leq c$, $ax + b \geq c$ mit $a, b, c \in Q \wedge a \neq 0$ sind zu behandeln. Es muß deutlich werden, daß das Bestimmen der Lösungsmenge durch systematisches Probieren nur begrenzt anwendbar ist.

Abbildung 14: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium Mathematik, Niedersachsen 1989, S. 11

In Klasse 8 wird dann ein systematisches Vorgehen in der Algebra gefordert, wobei im Sinne eines Spiralcurriculums auf Klasse 7 Bezug genommen wird.

8.2 Lineare Gleichungen und Ungleichungen		
Ziele	Begriffe	Hinweise
8.2.1 Terme umformen und die Umformungen begründen können	Term Faktorisieren binomische Formeln Bruchterme	Es sollen auch Aufgaben mit mehreren Klammerebenen betrachtet werden.
8.2.2 lineare Gleichungen und Ungleichungen in Q lösen können		Im Anschluß an 7.3.3 sollen unter Berücksichtigung der Termumformung von 8.2.1 komplexere Aufgaben gelöst werden.
8.2.3 Sachaufgaben mit Hilfe von linearen Gleichungen bzw. Ungleichungen lösen können		Z: Einfache Bruchgleichungen (siehe 9.3.3)

Abbildung 15: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium Mathematik, Niedersachsen 1989, S. 13

Die Gymnasialrichtlinien sind für die Klassenstufe 8 wenig konkret. Auffällig ist, dass für beide Klassenstufen gleichzeitig das Lösen von Gleichungen und von Ungleichungen gefordert wird. Dieses Nebeneinanderstehen von Gleichungen und Ungleichungen ist sicherlich als Folge der „neuen Gleichungslehre“ zu interpretieren.

Zeitliche Vorgaben für die Behandlung der algebraischen Bereiche in Form von Schulwochen oder Schulstunden werden in den Rahmenrichtlinien nicht gemacht.

In den Realschulrahmenrichtlinien für Niedersachsen wird die Idee des Spiralcurriculums deutlich. Die Algebra wird sowohl für Klassenstufe 7 als auch für Klassenstufe 8 den zwei Bereichen Lineare Gleichungen und Funktionen zugeordnet. In Klassenstufe 7 wird der Variablenbegriff bei den Inhalten erwähnt und in Klassenstufe 8 wieder aufgenommen und mit Termen unter dem Bereich Lineare Gleichungen thematisiert. Ferner werden deutliche Zeitvorgaben in Form von Unterrichtswochen gegeben, so dass hieraus eine Gewichtung möglich ist.

Für die Klassenstufe 7 in der Realschule werden konkrete Gleichungstypen genannt und der Bereich der Ungleichungen als Zusatzstoff deklariert.

Lineare Gleichungen I (7.2) (3 Unterrichtswochen)

Das Lösen linearer Gleichungen stellt ein Hauptanliegen des Mathematikunterrichts im Sekundarbereich I dar. Im Sinne eines Spiralcurriculums wird vom 7. Schuljahrgang an eine Gleichungslehre mit dem Ziel aufgebaut, Gleichungen durch Äquivalenzumformungen zu lösen. Wenn mit sehr einfachen Gleichungen begonnen wird und die dabei erarbeiteten Lösungsverfahren im 8. Schuljahrgang auf komplexere Gleichungen übertragen werden, ist mit einem größeren Lernerfolg zu rechnen.

Die zu verwendenden Äquivalenzumformungen werden aus Einsichten in das Rechnen innerhalb der bekannten Zahlbereiche gewonnen.

Lernziele	**Inhalte**	**Hinweise**
- einfache Gleichungen lösen und die Umformungen begründen	*Äquivalenz-Umformungen* Gleichung Variable; Grundmenge, Lösungsmenge; Quotientengleichung	Nur folgende Gleichungstypen: $a + x = b$, $ax = b$ $ax + b = c$ $ax = bc$ ($a \in Q^*$); $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ ($a, c \in Q^*$)
- die Lösung einer Gleichung überprüfen	Probe	
Z: - einfache Ungleichungen lösen - Sachaufgaben mit Hilfe einfacher Gleichungen lösen, die Ergebnisse interpretieren und kontrollieren.		

Anknüpfungen

- Die Inhalte des Themenkreises schließen an das Lösen von Gleichungen durch systematisches Probieren in der Orientierungsstufe an.

Abbildung 16: Rahmenrichtlinien für Realschule Mathematik, Klasse 7 Niedersachsen 1992, S. 12

In der Klassenstufe 8 wird der Bereich des Gleichungslösens wieder aufgegriffen und vertieft. Nach wie vor ist der Bereich der Ungleichungen Zusatzstoff.

Lineare Gleichungen II (8.1) (6 Unterrichtswochen)

Die im 7. Schuljahrgang erarbeiteten Lösungsverfahren linearer Gleichungen werden auf komplexere Gleichungen übertragen: Die Lösungsvariable steht jetzt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens. Außerdem kommen in den Gleichungen Klammerterme vor, die Termumformungen erfordern.

Es erfolgt eine Übertragung von Rechenfertigkeiten und -gesetzen aus Q auf Terme mit Variablen. Dadurch sind Verallgemeinerungen möglich, und es wird die Grundlage gelegt für die formelmäßige Behandlung vieler Sachzusammenhänge.

Lernziele	**Inhalte**	**Hinweise**
- den Wert eines Terms nach Einsetzen einer Zahl für die Variable(n) berechnen	Variable Term äquivalent	
- Terme äquivalent umformen und die Umformung begründen	*Termumformungen* Ausklammern Ausmultiplizieren binomische Formeln	Veranschaulichung durch Rechtecke
- lineare Gleichungen lösen und die Umformungen begründen	*Äquivalenzumformungen* Verhältnisgleichung	Grundmenge und Lösungsmenge beachten
Z: - lineare Ungleichungen lösen		
- Sachaufgaben mit Hilfe linearer Gleichungen lösen, die Ergebnisse interpretieren und kontrollieren		Das Übertragen eines Textes in eine Gleichung muß intensiv geübt werden.
- Gleichungen mit Formvariablen nach der Lösungsvariablen auflösen	Formvariable Lösungsvariable	
- Formeln aus Anwendungsbereichen nach jeder Variablen auflösen		
Z: - einfache Bruchgleichungen lösen.	Bruchterm Bruchgleichung Definitionsmenge	

Anknüpfungen

- Der Umgang mit Variablen in Termen, Gleichungen und Formeln wird später in kaufmännischen und in gewerblich-technischen Berufen gefordert. Das Variablenverständnis ist auch Voraussetzung für die Arbeit mit Computerprogrammen.

Abbildung 17: Rahmenrichtlinien für Realschule Mathematik, Klasse 8 Niedersachsen 1992, S. 17

Die gültigen Rahmenrichtlinien für Gesamtschulen sind überraschend alt, werden allerdings zur Zeit überarbeitet. An allen Stellen ist noch der Einfluss der Reform zu sehen. Das zeigt sich in der Betonung von Operatoren und ist im Bereich der Gleichungslehre deutlich erkennbar. Konkrete Aufgabentypen werden dort im Gegensatz zu den Realschulrichtlinien nicht benannt. Statt dessen wird in Abschnitt 2 für die 8. Jahrgangsstufe die Behandlung von Bruchgleichungen gefordert. Dadurch wird die Bestimmung der Definitionsmenge notwendig. Diese Rahmenrichtlinien sind gerade im Gesamtschulbereich als äußerst problematisch zu bewerten und es ist davon auszugehen, dass sie für den derzeitigen Mathematikunterricht keine Bedeutung mehr haben. Trotzdem sollen sie hier für den Bereich der Gleichungslehre in der 8. Jahrgangsstufe aus Vollständigkeitsgründen wiedergegeben werden.

08.02 Gleichungen I.Grades mit einer Variablen

Vorbemerkungen: Mit den **Termumformungen** und den **Äquivalenzumformungen von Gleichungen/Ungleichungen** wird den Schülern ein besonders wichtiges und weittragendes mathematisches Verfahren vermittelt. Die grundlegenden Umformungsgesetze sollen an einfachen Beispielen herausgearbeitet werden, ihre Anwendung ist beim Lösen von Gleichungen vielfältig zu üben.
Bei der Begriffsbildung **„Lösungsmenge"** sollen einfache Ungleichungen auftreten, die durch systematisches Probieren gelöst werden.
Auf die ausführliche Behandlung von „Bruchgleichungen" und „Bruchungleichungen" kann im Mathematikunterricht des Sekundarbereichs I verzichtet werden. Allen Schülern muß jedoch bei der Lösung von Proportionen oder von elementaren Bruchgleichungen der im Lehrziel 2 genannten Typen deutlich werden, daß die Definitionsmenge der Gleichung zu beachten ist.
Mit leistungsstarken A-Kurs-Schülern können im Rahmen einer Unterrichtssequenz „Lösen von Ungleichungen" die Monotoniegesetze für die Addition und für die Multiplikation in Q formuliert und angewendet werden.

LEHRZIELE

1. Terme durch Anwenden der Gesetze für das Rechnen mit rationalen Zahlen umformen, d. h. Verknüpfungsvorschriften und algebraische Gesetze für das Rechnen In Q anwenden
   Beispiele:
   Zusammenfassen, Klammem auflösen, Ausmultiplizieren,
   Ausklammern,
   Binomische Formeln anwenden

   V: Umformungsregeln auf algebraische Gesetze zurückführen

2. Gleichungen 1. Grades mit einer Variablen in Q bzw. in einer Teilmenge von Q mit Hilfe von Äquivalenzumformungen lösen
   Hinwels: Es sind auch Proportionen, Produktgleichungen und Bruchgleichungen des Typs $\frac{a}{x}$ +b=c bzw. $\frac{a}{x} \cdot$ b = c zu lösen.

3. Geeignete Textaufgaben mit Hilfe linearer Gleichungen lösen, insbesondere auch „Formeln" aus Anwendungsbereichen der Mathematik herleiten und nach verschiedenen Variablen auflösen
   Beispiele:
   Zinsformel, Formeln für Flächeninhalte und Volumina

Abbildung 18: Rahmenrichtlinien für die Integrierte Gesamtschule Niedersachsen, Mathematik 1984, S. 25 f.

Lediglich bei den Realschulrahmenrichtlinien werden zeitliche Vorgaben gemacht. Für beide Jahrgänge wird von 26 Unterrichtswochen ausgegangen. Damit ergeben sich in Klasse 7 ein Anteil von 12% Algebra und in Klasse 8 von 42% Algebra mit 23 % Gleichungen und 19% Funktionen.[15]

Als Schulbücher wurden in meiner Untersuchung in den Schulen drei verschiedene Gymnasialwerke, zwei verschiedene Realschulwerke und ein Gesamtschulwerk verwendet. In keiner Klasse hatte es einen Schulbuchwechsel zwischen oder innerhalb einer Klasse gegeben. Das bedeutet, dass insbesondere in der Klasse 7 bis Klasse 9 (Untersuchungszeitpunkt) das gleiche Schulbuchwerk verwendet wurde.

An Gymnasialwerken wurden „Mathematik heute Niedersachsen“ von 1990 herausgegeben von Griesel und Postel, „Hahn/Dzewas Niedersachsen“ von 1989 (Klassenstufe 7) bzw. 1990 (Klassenstufe 8) herausgegeben von Cukrowitz und Dzewas und „Lambacher/Schweizer“ Niedersachsen von 1993 herausgegeben von Schmidt in den untersuchten Gymnasialklassen verwendet.

An Realschulwerken wurden „Welt und Zahl“ von 1993 herausgegeben von Schröder und Wurl, sowie „Neues mathematisches Arbeitsbuch“ von 1992 (Klassenstufe 7) bzw. 1993 (Klassenstufe 8) herausgegeben von Meyer, Unger und Vogler in den untersuchten Realschulklassen verwendet.

In den untersuchten Gesamtschulen wurde „Mathematik 7 Gesamtschule“ von 1992 und „Mathematik 8 Gesamtschule“ von 1993 eingesetzt.

	Gymnasium			**Realschule**		**Gesamtschule**
	Mathematik heute	Hahn/ Dzewas	Lambacher/ Schweizer	Welt und Zahl	Neues mathematisches Arbeitsbuch	Mathematik Gesamtschule
Klasse 7						
Terme	14 Seiten 6%					
Gleichungen und Ungleichungen	13 Seiten 5%	16 Seiten 7%	10 Seiten 5%	14 Seiten 9%	13 Seiten 9%	-
Summe	27 Seiten 11%	16 Seiten 7%	10 Seiten 5%	14 Seiten 9%	13 Seiten 9%	-

Tabelle 1: Schulbuchvergleich zum Anteil der Algebra[16] in Klasse 7

[15] vgl. Niedersächsisches Kultusministerium (hrsg): Rahmenrichtlinien für die Realschule, Mathematik, 1992, S. 9

[16] Bei der Prozentangabe in der Summe entstehen Rundungsfehler.

	Gymnasium			Realschule		Gesamtschule
	Mathematik heute	Hahn/ Dzewas	Lambacher/ Schweizer	Welt der Zahl	Neues mathematisches Arbeitsbuch	Mathematik Gesamtschule
Klasse 8						
Terme und Umformungen	27 Seiten 13%	37 Seiten 18%	32 Seiten 22%	17 Seiten 11%	27 Seiten 17%	35 Seiten 19%
Gleichungen und Ungleichungen	71 Seiten 34%	52 Seiten 25%	22 Seiten 15%	19 Seiten 12%	24 Seiten 15%	31 Seiten 17%
Funktionen	21 Seiten 10%	37 Seiten 18%	25 Seiten 17%	14 Seiten 9%	26 Seiten 17%	24 Seiten 13%
Summe	119 Seiten 57%	126 Seiten 62%	79 Seiten 54%	50 Seiten 32%	27 Seiten 50%	90 Seiten 48%

Tabelle 2: Schulbuchvergleich zum Anteil der Algebra[17] in Klasse 8

Im Rahmen der TIMS-Studie wurde anhand von Lehrerbefragungen die unterrichtliche Behandlung von mathematischen Themen ermittelt. In der 8. Jahrgangsstufe zeigt sich im Vergleich der Länder Deutschland, USA und Japan folgendes Bild.

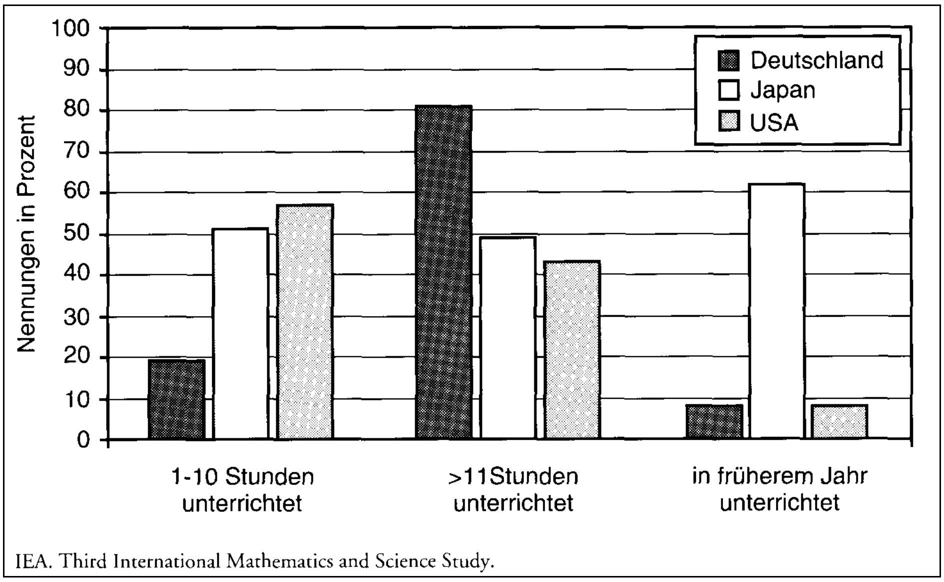


Abbildung 19: Baumert/Lehmann 1997, S. 198 Behandlung von linearen Gleichungen mit einer Unbekannten im Mathematikunterricht der 8. Jahrgangsstufe nach Intensität und Ländern (Nennungen in Prozent)

[17] Bei der Prozentangabe in der Summe entstehen Rundungsfehler.

Damit zeigt sich, dass zumindest der Anteil der Behandlung von linearen Gleichungen in der 8. Klasse in Deutschland im Vergleich zu Japan und den USA deutlich größer ist; insbesondere wenn dabei beachtet wird, dass man in diesem Jahrgang von maximal 30 Unterrichtswochen ausgehen muss. Um so interessanter ist, dass bei einem Anteil von 27 Items zum Bereich Algebra zu insgesamt 152 Items (dies entspricht 18%) im Bereich der Mathematik bei TIMSS die Lösungsquote der deutschen Schülerinnen und Schüler mit 48% ca. 4% unter dem internationalen Mittelwert liegt.[18]

Als weitere Quelle für die Beschreibung des heutigen Stellenwerts der Schulalgebra soll die Auswertung der Realschulabschlussprüfung 1998 von Baden-Württemberg dienen.

In der empirischen Analyse der Realschulabschlussprüfung 1998 in Baden-Württemberg wird für die Algebra ein empirisches Gewicht von 25,5% angegeben mit einem Lösungserfolg von 45,9%[19]. Die Autoren folgern, dass die Algebra *„innerhalb der Prüfung ein Gebiet mit beträchtlichem Gewicht und hoher Misserfolgsquote“* (Lörcher/Maier 1999, S. 48) im Vergleich zu den anderen Bereichen ist. Im Vergleich der Abschlussprüfungen zeigt sich, dass der Anteil der Algebra (auf Kosten des Sachrechnens) in den letzten Jahren größer wird. Dies hat somit natürlich Auswirkungen auf den tatsächlichen Mathematikunterricht und scheint im Zusammenhang mit einer Forderung nach Stärkung der Algebra, der in Baden-Württemberg von Verbänden und Kultusmisterium in den neunziger Jahren erhoben wurde, zu stehen. *„Mit Gültigkeitsbeginn des neuen Lehrplans wird 1995 das Sachrechnen stark reduziert und durch Aufgaben aus der Algebra ersetzt“* (Lörcher/Maier 1999, S. 5).

Zukünftige Perspektive

Insbesondere als Reaktion auf die enttäuschenden Ergebnisse für Deutschland bei TIMSS wird sowohl von mathematikdidaktischer Seite als auch aus den Kultusministerien eine Veränderung des Mathematikunterricht gefordert. Unterstützung erfährt dies in der aktuellen gesellschaftlichen Diskussion aus der Industrie und der Wirtschaft – konkret von Seiten der Arbeitgeberverbände.

Dabei lassen sich zwei unterschiedliche Diskussionsstränge erkennen: einerseits die Forderung nach Verbesserung der sogenannten Grundfertigkeiten und anderseits die Forderung nach stärkerer Anwendungsorientierung im Zusammenhang mit dem Erwerb von Schlüsselqualifikationen im Kontext der sogenannten „Globalisierung“.

So heißt es in der „Erklärung der Fachverbände DMV, GDM, MNU“ vom 19. 02. 1997, *„dass im Mathematikunterricht in Deutschland generell zu viel Wert gelegt wird auf das routinemäßige, manchmal gar schematische Lösen innermathematischer Standardaufgaben. Zu kurz kommen insbesondere das selbständige,*

[18] vgl. Baumert/Lehmann 1997, S. 104f.
[19] vgl. Lörcher/Maier 1999, S. 48

aktive Problemlösen, das inhaltliche, nicht-standardisierte Argumentieren sowie das Herstellen von Verbindungen mathematischer Begriffe mit Situationen aus Alltag und Umwelt“ und weiter: „*Unser Mathematikunterricht muss sich verändern, Innovationen sind nötig. Die Schule und speziell der Mathematikunterricht stehen in einem sich ständig verändernden Umfeld. So stellen z.B. die heute auch für die Schule verfügbaren technischen Hilfsmittel (Taschencomputer, Computer, Internet etc.) eine einzigartige Herausforderung dar.*“

In Niedersachsen ist anderseits für das Schuljahr 1999/2000 erstmalig eine verpflichtende Leistungsüberprüfung in Klasse 10 für alle Schulformen eingeführt wurden. Diese ist allerdings anders als in Sachsen und Baden-Württemberg nicht zentral sondern schulintern organisiert. Diese dezentrale Prüfung stärkt vermutlich eher einen Ansatz zur Verbesserung im Bereich der Grundfertigkeiten, auch im Sinne der Abprüfbarkeit und Vergleichbarkeit, als einen Ansatz zur Verbesserung im Bereich der Anwendungsorientierung.
Insbesondere der Hinweis auf die Möglichkeiten im Zusammenhang mit den technischen Hilfsmitteln in der Erklärung der Fachverbände zeigt eine denkbare Perspektive auf. Durch die Verfügbarkeit von Computeralgebrasystemen (CAS) wie MAPLE, MATHEMATICA und DERIVE und grafikfähigen Taschenrechner mit integriertem CAS wie z. B. dem TI 92 der Firma Texas Instruments besteht die Möglichkeit im Mathematikunterricht den Kalkül zu reduzieren, hierfür wäre der Computer im Sinne einer „black box“ zu gebrauchen, und stattdessen mehr Begrifflichkeit und Bedeutung, stärker Modellierungen zu behandeln.[20]
Zu bedenken bleibt, inwieweit ein solches Ziel – Reduktion der Syntax und Stärkung der Semantik, Reduktion des Kalküls und Stärkung der Bedeutung – durch den Einsatz von CAS wirklich erreicht wird. Insbesondere scheint mir bei Artikeln zu der Verwendung von Computern und CAS im weiteren oder engeren Sinne die mathematisch-inhaltliche oder besser die Expertensicht zu dominieren. Die Schülersicht wird dabei eher vernachlässigt. Im Rahmen meiner unterrichtlichen Tätigkeit habe ich im Schuljahr 1996/97 und 1997/98 einen Grundkurs Mathematik als Prüfungskurs mit Verwendung des TI 92 unterrichtet. Auch die Abiturprüfung fand mit Einsatz des TI 92 statt. Aus Lehrersicht schien es durch die Entlastung des Kalküls zu gelingen, mehr Bedeutung im Mathematikunterricht zu erzeugen. Die Rückmeldung der Kollegen und der Teilnehmer an der mündlichen Abiturprüfung bestätigte dies. Nichtsdestotrotz waren die Schülerinnen und Schüler eher unzufrieden, da sie ihrer Meinung nach keine „*richtige Mathematik betrieben*“ haben. Dies ist eventuell erklärbar dadurch, dass diesen Schülerinnen und Schülern elf Schuljahre lang ein Bild von Mathematik präsentiert wurde, in dem der Kalkül im Vordergrund stand.
Zu beachten ist ferner, dass die verschiedenen CAS eine systemeigene Syntax besitzen, die sich deutlich von der im Unterricht verwendeten unterscheidet.

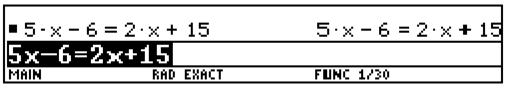
Dies soll durch folgenden Ausschnitt aus *„The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics*“ von Kutzler (1999) zur Verwendung des TI-92 verdeutlicht werden.

[20] Hierzu gibt es seit Ende der achziger Jahre eine Vielzahl von mathematikdidaktischen Artikeln, in denen konkrete Unterrichtsvorschläge und Perspektiven beschrieben sind.

Auf eine Darstellung der komplexeren Syntax von MATHEMATICA und MAPLE möchte ich verzichten.

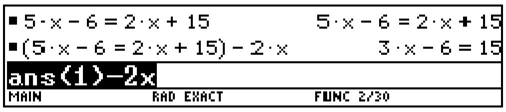
Using an algebraic calculator the learning process could be conducted as follows. First we enter the equation.

5x-6=2x+15 (ENTER)



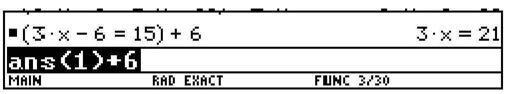
Then follows the input of the equivalence transformation. (The calculator automatically applies the subtraction operator to the last expression, i.e. the equation as its first argument.)

-2x (ENTER)



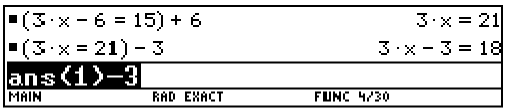
The simplification, i.e. the application of the equivalence transformation to both sides of the equation, was performed by the calculator. Then the student chooses the next equivalence transformation:

+6 (ENTER)



We mimic a student who makes the above discussed mistake:

-3 (ENTER)



It goes without saying that the calculator simplifies properly, hence the student receives an immediate feedback that the transformation –3 was not successful (i.e. did not simplify the equation to „x =“).

Abbildung 20: Auszug aus Kutzler[21] (1999)

Auch wenn in diesem Beispiel die Syntax noch sehr nahe an der im Unterricht verwendeten ist, bleibt z. B. eine Schreibweise wie (5x-6=2x+15) – 2x für eine Äquivalenzumformung äußerst problematisch.

[21] vgl. Kutzler (1999) unter http://www.kutzler.com/bk/a-pt/ped-tool.html vom 3.8.1999

Insgesamt sollte beachtet werden, inwieweit unter dem Gesichtspunkt der Stärkung der Semantik und damit der Stärkung der mathematischen Bedeutung nicht zusätzlich eine neue Ebene der Syntax entsteht, die dann das Erreichen der semantischen Ebene analog zur „Reform des Mathematikunterrichts" im konkreten Mathematikunterricht verhindert.

Außerdem sollte in der mathematikdidaktischen Diskussion die Frage erörtert werden, inwieweit mit Hilfe der Computeralgebrasysteme nicht das Bestreben zum „anspruchsvolle Mathematik Betreiben" steckt und es in erster Linie gar nicht um eine Verringerung des Kalküls geht; eine Entlastung des Kalküls wäre seit Aufkommen der Taschenrechner (auch ohne CAS) möglich gewesen, hat sich aber im Mathematikunterricht der achtziger und neunziger Jahre nicht gezeigt. Ferner dürfte ein Großteil der jetzigen Lehrergeneration mit solch einer Veränderung des Mathematikunterrichts schlicht überfordert sein. Ob solche eine Perspektive aus den genannten Gründen ohne grundsätzliche Änderungen des Curriculums somit zum Scheitern geradezu verurteilt ist, bleibt abzuwarten. Die Parallelen zur Anfangseuphorie bei der „neuen Mathematik" sind meines Erachtens unverkennbar.

Auch hier wird das typische Dilemma der Mathematikdidaktik sichtbar: der Gegensatz zwischen dem fachlichen Zugang und dem Zugang aus Schülersicht. Ist dieser Zugang eher produktorientiert oder prozessorientiert?

Der fachliche Zugang ist (evtl. nur vermeintlich) einfacher. Es können die Verfahren und die Begriffe der Fachdisziplin verwendet und auf Schulniveau angepasst werden.
Der Zugang aus Schülersicht ist schwieriger. Dazu sind Ideen und Hypothesen notwendig, wie Schülerinnen und Schüler welche Inhalte lernen, welche Konzepte sie hierbei entwickeln, welche Fehlkonzepte, welche Verfahren sie wie beherrschen usw. Dazu sind diagnostische Hilfsmittel notwendig, die dies aufzeigen. Wenn man den Zugang aus Schülersicht wählt, entstehen weitere Probleme: Wie können Hypothesen entwickelt werden und wie können sie überprüft werden, mit welchen diagnostischen Hilfsmitteln? Genügt ein Schüler oder eine Schülerin als Repräsentant für die Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler? Benötigt man zum Überprüfen der Hypothesen eine (repräsentative) Stichprobe? Inwieweit spielen hier psychologische (kognitions- oder lernpsychologische) und mathematisch-inhaltliche Überlegungen (Theorien) eine wesentliche Rolle?

In allen Bereichen der Schulmathematik sind immer beide Zugänge berücksichtigt, allerdings gibt es Zugänge, die größtenteils fachlich und andere, die größtenteils aus Schülersicht begründet sind.

Diese Dilemmabeschreibung soll im Folgenden immer wieder aufgegriffen werden und kann somit als roter Faden in den weiteren Kapiteln dienen.

2. Algebraische Anforderungen in der Schule

In diesem Kapitel wird ein Überblick über die Anforderungen im Mathematikunterricht im Gebiet der Algebra gegeben. Dabei lassen sich zwei verschiedene Sichtweisen herausarbeiten, einerseits die Lehrersicht bzw. die stoffdidaktische Sicht (im Sinne von Lehr- und Lernzielen) und anderseits die Schülersicht (welche Konzepte oder welche Verfahren entwickeln oder beherrschen Schülerinnen und Schüler). Der Schwerpunkt liegt auf dem Bereich der Gleichungen. Aus curricularen Gründen ist das Gebiet Variable und Terme bzw. Termumformungen selbstverständlich zu beachten. Das für die Schulalgebra wichtige Teilgebiet der Funktionen wird nur kurz erwähnt, da es typischerweise erst nach dem Lösen linearer Gleichungen systematisch im Unterricht behandelt wird. Dies gilt auch für quadratische Gleichungen und lineare Gleichungssysteme, wenn auch gerade für den Bereich der Funktionen in typischen Beschreibungen bei verschiedenen Autoren und auch in den Lehrplänen propädeutische Zugänge und das Spiralcurriculum eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielen[22].

2.1. Variablen, Terme, Gleichungen, Funktionen

In Schulbüchern bis in die sechziger Jahre hinein wurden Bezeichnungen wie Unbekannte, allgemeine Zahl und Variable benutzt oder Begriffe wie Buchstabenrechnen verwendet[23]. Variable wurden als „allgemeine Zahlen“ oder „unbekannte Zahlen“ aufgefaßt. Zum Termumformen und Gleichungslösen wurden meist verbal formulierte Regeln bereitgestellt und mit diesen sollte üblicherweise eine Vielzahl von Übungsaufgaben gerechnet werden. Zusätzlich dazu gab es eine „*blühende Tradition von Textaufgaben*“[24]. In den siebziger Jahren hat sich die einheitliche Verwendung des Begriffs Variable (evtl. noch Platzhalter) durchgesetzt, obwohl z. B. Lauter für die Verwendung des Begriffes „Leerstelle“ plädierte. „*Glücklicherweise lehrt die Erfahrung, daß der ständige korrekte Gebrauch des – umgangssprachlich für die Schüler nicht vorbelasteten – Fremdworts* [gemeint ist Variable, d. Verf.] *auf die Dauer die Gefahr der Fehldeutung mehr und mehr mindert*“ (Lauter 1964, S. 116).

Unabhängig davon hat sich gezeigt, dass sich mit Variablen in der mathematischen und der unterrichtlichen Verwendung, sowie der bei Schülerinnen und Schülern vorhandenen Vorstellung viele verschiedene und durchaus widersprüchliche Kontexte verbinden können; Variable als etwas Veränderliches, Platzhalter als etwas zu Ersetzendes oder als etwas, für das was eingesetzt werden kann, je nach Kontext etwas Beliebiges oder etwas ganz Bestimmtes. Über das, was Variablen sind, welche Aspekte je nach Konzepte im Vordergrund stehen und was für Probleme dadurch entstehen, dass Schülerinnen und Schüler eingeschränkte Vorstellungen oder gar Fehlvorstellungen im Zusammenhang mit Variablen besitzen, gibt es eine Vielzahl an Untersuchungen und Veröffentlichungen.

[22] vgl. z. B. Vollrath 1994
[23] vgl. Vollrath 1994, S. 68
[24] vgl. Malle 1993, S. 19

Aus dem täglichen Leben sind ebenfalls Variablen bekannt[25] und diese Vorkenntnisse können bei Schülerinnen und Schülern zu Konflikten führen, insbesondere wenn bedacht wird, wie seit den achtziger Jahren in vielen Schulbüchern versucht wird, Mathematik mit Realitätsbezug zu behandeln und eine wie auch immer geartete Anwendungsorientierung unterrichtlich umzusetzen.

Das Gleichungslösen besitzt eine große Bedeutung und wird an verschiedenen Stellen im curriculuaren Ablauf benötigt: z. B. bei linearen Gleichungen, bei quadratischen Gleichungen, bei linearen Gleichungssystemen, beim Auflösen von Formeln beim Sachrechnen sowie in der Geometrie und in der gesamten Mathematik der gymnasialen Oberstufe.

Der Funktionsbegriff ist seit der Meraner Konferenz einer der zentralen Leitbegriffe in der Mathematik. Im Sinne einer Propädeutik gehört der Bereich der Zuordnungen (typischerweise Klassenstufe 7) ebenfalls zu diesem Bereich, wenn auch ohne algebraische Formulierung.

Für Vollrath bilden die Funktionen „*den wichtigsten Themenstrang im Algebraunterricht*“ (Vollrath 1994, S. 118). „*Die ganze Tragfähigkeit des Funktionsbegriffs erschließt sich dem Schüler allerdings in der Sekundarstufe II in der Analysis*“ (Vollrath 1994, S. 118). Diese Sichtweise findet sich aber in Schulbüchern und im praktischen Unterricht nicht wieder. Wenn man propädeutische Zugänge vernachlässigt, wird erst ab der 8. Jahrgangsstufe der Bereich der Funktionen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe behandelt.

Im Zusammenhang mit Funktionen bekommen für Malle die Variablen zusätzliche Aspekte. Beim Simultanaspekt werden alle Zahlen aus dem betreffenden Bereich gleichzeitig repräsentiert, und beim Veränderlichenaspekt werden alle Zahlen in zeitlicher Aufeinanderfolge repräsentiert[26].

Verkürzt kann man sagen, dass ab Klassenstufe 8 die Funktionsbetrachtungen den Schwerpunkt im Mathematikunterricht bilden und das Lösen von (nicht nur linearen) Gleichungen das wichtigste Verfahren darstellt.

2.2. Variablen

Zu Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern im Zusammenhang mit Variablen gibt es eine Vielzahl an Untersuchungen und Artikeln. Aus Platzgründen möchte ich mich auf einige wenige, aus meiner Sicht wesentliche Untersuchungen und Veröffentlichungen beschränken

[25] In der Umgangssprache werden Oberbegriffe verwendet, die verschiedene Einzelbegriffe zusammenfassen, z. B. Hund, Frau, Haus usw. Hierbei stehen die Namen für feste Objekte. Außerdem sind Leerstellen z. B. in Form von Kästchen aus Formularen und Rätseln (z. B. Kreuzworträtseln) bekannt; hier können die Zeichen für viele Objekte stehen.
[26] vgl. Malle 1993, S. 80

Vollrath (1994) legt in seiner „Algebra in der Sekundarstufe“ im Wesentlichen Wert darauf, inwieweit sich der Gebrauch von Variablen abhängig von „*möglichen Bindungen*“ in unterschiedlichen Situationen unterscheidet.

Er bezieht sich hierbei auf Pickert (1961) und dessen Klassifikation und unterscheidet:

(1) Bindung durch Quantoren,
(2) Bindung durch Mengenbildung,
(3) Bindung durch Funktionsbildung,
(4) Bindung durch Kennzeichnung.

Diese Einteilung wird durch folgende Beispiele skizziert:

zu (1) $\bigwedge_x x + x = 2 \cdot x$

$\bigvee_x 2 + x = 4$

$\bigvee_x a + x = b$; hier sind die Variablen a, b frei.

zu (2) $\{x \mid 2x + 1 = 7\}$ Lösungsmenge einer Gleichung;

$\{x \mid ax + b = c\}$ Lösungsmenge mit freien Variablen a, b, c;

$\{(x;y) \mid y = x^2\}$ Relation, Funktion;

$\{(x;y) \mid y = ax^2 + b\}$ Funktionstyp, Relationstyp;

zu (3) z. B. „Die Funktion, welche x in x^2 abbildet“,

symbolisch: $x \to x^2$.

Die Funktionsschar: $x \to x^2 + c$, c ist frei.

zu (4) z. B. „dasjenige $x \in \mathbb{N}$ mit $1 < x < 3$“.[27]

Vollrath bezieht sich zwar auf Arbeiten, die die Schülersicht beim Variablenkonzept beachten, formuliert aber: „*Als wichtige Kontexte für unterschiedliche Aspekte beim Arbeiten mit Variablen erwiesen sich: Eigenschaften der Zahlbereiche, Terme und Termumformungen, Funktionen, Gleichungen und Formeln.*“ (Vollrath 1994, S. 71).

Insgesamt beschreibt Vollrath hiermit eine mathematisch-inhaltliche Sichtweise. Verstärkt wird dies durch die Betrachtung der Eigenschaften der Zahlbereiche, was als charakteristisch für die Sichtweise in der Zeit der „Reform der Mathematik“ angesehen werden kann.

Dagegen formuliert Malle (1993, S. 46) in seinem Buch „Didaktische Probleme in der elementaren Algebra“ eine Klassifikation für Aspekte des Variablenbegriffs. Entscheidend ist hierbei, dass diese Klassifikation aus Schülersicht erfolgt.

(1) Gegenstandsaspekt: *Variable als unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl (allgemeiner als unbekannter oder nicht näher bestimmter Denkgegenstand).*

[27] s. Vollrath 1994, S. 69 f.

(2) Einsetzungsaspekt:	*Variable als Platzhalter für Zahlen bzw. Leerstelle, in die man Zahlen (genauer: Zahlnamen) einsetzen darf.*
(3) Kalkülaspekt: (Rechenaspekt)	*Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf.*

Zurückgreifen konnte Malle hierfür auf eine Reihe von Veröffentlichungen, wobei das Forschungsprojekt „*Concepts in Secondary Mathematics and Science*" (CSMS)[28] von 1974 – 1979 in England sicherlich wegweisend war.

Im Rahmen von CSMS wurde versucht, mit Hilfe von Textaufgaben Verstehensstufen von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I zu analysieren. Diese umfangreiche Untersuchung war die erste, die die Schülersicht in der Mathematik zum Untersuchungsgegenstand machte.

Aufgrund der Auswertung von ca. 1000 Schülerinnen und Schülern im Alter von 14 Jahren im Bereich der Algebra unterschied Küchemann (1981) sechs Arten der Interpretation und Verwendung von Buchstaben[29]:

- Letter evaluated
  This category applies to responses where the letter is assigned a numerical value from the outset.
- Letter not used
  Here the children ignore the letter, or at best acknowledge its existence but without giving it a meaning.
- Letter as an object
  The letter is regarded as a shorthand for an object or as object in its own right.
- Letter used as a specific unknown
  Children regard a letter as a specific but unknown number, and can operate upon it directly.
- Letter used as a generalized number
  The letter is seen as representing, or at least being able to take, several values rather than just one.
- Letter used as a variable
  The letter is seen as representing a range of unspecified values, and a systematic relationship is seen to exist between two such sets of values.

Diese umfangreiche Untersuchung lieferte erste empirische Ergebnisse zu der Fragestellung, was Schülerinnen und Schüler für Konzepte von Variablen besitzen. Hierbei stand nur die Untersuchung des semantischen Anteils im Vordergrund, der syntaktische -, der Kalkülanteil, fehlte[30].

[28] s. Hart 1981
[29] vgl. Küchemann 1981, S. 104
[30] vgl. Küchemann 1981, S. 102 ff. zu den verwendeten Items.

Die gewählte Interpretation der Schülerinnen und Schüler war zwar von der Art der Fragestellung und ihrer Komplexität anhängig[31]. Trotz unterrichtlicher Behandlung war aber nur ein kleiner Prozentsatz der Schülerinnen und Schüler in der Lage, Variablen als verallgemeinerte Zahlen zu sehen. Eine größere Anzahl von Schülerinnen und Schülern interpretierte Buchstaben als spezielle Unbekannte und die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler betrachtete Buchstaben entweder als konkrete Objekte oder ignorierte diese.[32] [33]

Zu beachten ist, dass die Veröffentlichung einige Inkonsistenzen besitzt. So ist nicht klar, welche Schülerinnen und Schüler für die Stichprobe in der Algebra ausgewählt wurden. So nahmen im Jahr 1976 dreitausend Schülerinnen und Schüler an dem Test teil, im darauffolgenden Jahr etwa 500, von Küchemann ausgewählt wurden allerdings nur knapp 1000 Schülerinnen und Schüler[34].

Außerdem ist die Einteilung in die verschiedenen Verwendungen von Buchstaben uneinheitlich. „*Letter not used* “ und „*Letter as an object* “ sind falsche Schülervorstellungen. „*Letter used as a specific unknown*“, „*Letter used as a generalized number*“, „*Letter used as a variable*“ sind Variablenaspekte, die sich auch bei Malle wiederfinden. „*Letter used as a specific unknown*“ entspricht dem Einsetzungsaspekt und „*Letter used as a generalized number*“ dem Gegenstandsaspekt. Die letztgenannten drei Aspekte oder Interpretationen spielten in der Folge in der Mathematikdidaktik eine große Rolle.

Im Mathematikunterricht stand der Kalkülaspekt immer im Vordergrund. Malle gelingt es bei seiner Klassifikation im Gegensatz zu Küchemann, den Kakülanteil mitzubeachten. Abhängig vom betrachteten Aspekt bekommen unter dieser Sichtweise Terme und Gleichungen folgende unterschiedliche Bedeutung:

	Gegenstandsaspekt	Einsetzungsaspekt	Kalkülaspekt
Variable	Zahl	Platzhalter	Zeichen
Term	Zahl	Zahlform	Zeichenreihe
Gleichung	Aussage	Aussageform	Zeichenreihe

Tabelle 3: Malle 1993, S.47

Wenn man beachtet, dass der Kalkülanteil im Schulunterricht der Algebra immer im Vordergrund stand, so ist nach Malle (1993, S. 49) charakteristisch,

[31] Küchemann teilte die gegebenen Aufgaben dementsprechend in vier "Levels" ein.
[32] Für die exakten Ergebnisse siehe Küchemann 1981 S. 105 ff.
[33] Weitere Untersuchungen und Veröffentlichungen zum Variablenverständnis sind u. a. SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics 1980 –1983) (siehe hierzu Booth 1984), Ekenstam/Greger (1989), Chalouh/Herscovics (1988) und Franke/Wynands (1991).
[34] vgl. Hart 1981, S. 6 und Küchemann 1981, S. 103

dass bis in die sechziger Jahre vor allem der Gegenstandsaspekt und danach vor allem der Einsetzungsaspekt betont wurde.

Lörcher (1995a, S. 15) benutzt eine andere Form der Klassifikation. Er beschreibt die Bedeutung von Variablen abhängig von den Situationen, in denen die Schülerinnen und Schüler mit diesen Variablen in Kontakt kommen. Zusätzlich wird eine Beschreibung der Schüleraktivitäten mit Variablen in den entsprechenden Situationen gegeben.

Insofern kann man sagen, dass Malle und Küchemann eine stärker statische Sichtweise haben, während Lörcher eine situationsabhängige dynamische Sichtweise hat.

Lörcher unterscheidet folgende Bedeutungen von Variablen:

- Variable als *Namen von Speichern,* z.B. auf dem Taschenrechner oder in einer Programmiersprache. Man kann sich den Buchstaben als Etikett auf einer Schublade vorstellen, in der eine bestimmte Zahl ist. Man kann Rechenanweisungen für den Speicher geben, ohne dass man die Zahl im Speicher kennen muss.
- Variable als *Symbole für unbestimmte Zahlen,* die man nach bestimmten Regeln umformen kann (Syntax), ohne dass man zu wissen braucht, wofür sie stehen. Dieser Aspekt steht bei vielen *Termumformungen* im Vordergrund.
- Variable als *unbekannte Zahlen,* die man bei *Gleichungen* zu ermitteln versucht.
- Variable als *allgemeine Zahlen,* für die Gesetze und Zusammenhänge (z.B. in *Formeln)* formuliert werden. Hier kann man Variable oft als Abkürzungen von Worten interpretieren (l für Längen, p für Primzahl usw.).
- Variable als unabhängige und abhängige *Veränderliche,* deren Zusammenhang in *Funktionen* untersucht wird.
- Variable als *Formvariable,* die sich als *Parameter* auf einer höheren Stufe variieren lassen.

Außerdem unterscheidet er folgende drei Haupttätigkeiten mit Variablen, die kennzeichnend für diese sind:

- Man kann in Variable *einsetzen* oder umgekehrt auch Zahlen durch Variable ersetzen.
- Man kann Variable *umformen*.
- Man kann *verallgemeinern,* indem man variiert und dabei Beziehungen herstellt.

Interessant ist, dass Lörcher den verschiedenen Bedeutungen immer entsprechende Tätigkeiten zuordnet und diese Zuordnung über die Schuljahre tragfähig ist. Insbesondere die Bedeutung im Zusammenhang mit dem Taschenrechner gibt neue unterrichtspraktische Impulse.
Lörcher stellt dies in folgender Übersicht dar:

Tätigkeiten	einsetzen		umformen		verallgemeinern	
Bedeutungen	Wert zuweisen	ersetzen	Form ändern, vereinfachen	lösen	variieren	in Beziehung setzen
Name eines Speichers	Taschen-rechner: `3 Min`	Taschen-rechner: `MR + 3 =`	Taschen-rechner: `2 x MR = Min`			`K1 = K3` (verschiedene Speicher)
Symbol einer unbestimmten Zahl		eine Variable durch eine andere erset-zen	Termumfor-mungen ordnen, rechnen	unlösbare Gleichungen z. B.: 2x+3=2x+4		
Unbekannte	Grundschule: 3+ =7 durch probieren. Probe bei Gleichungen: z. B. x=3 in 2x+5=7x-10 einsetzen	Lineare Gleichungs-systeme: Einsetzungs-verfahren	Umformung von Gleichungen Lineare Gleichungs-systeme: Additionsver-fahren	Grundschule: -3-8=10 durch Um-kehroperator-ketten Lösen von Gleichungen: Äquivalenz-umformungen	x^2 -2x+1=0 als Schnitt von $y=x^2$ und y=2x-1 Lineare Gleichungs-systeme: grafische Lösung	zu Textauf-gaben Gleichungen aufstellen Lineare Gleichungs-systeme: Gleichsetzungs -verfahren
Allgemeine Zahl	Klasse 5/6: Überschrift in Tabellen z.B. bei Rechen-vorteilen (20+1)·(20-1)= 20^2 - 1	Klasse 5/6: Variable als Abkürzung eines Worts: z B.: V= l·b·h	Grundschule: Tausch-, Umkehr-, Nachbar-, Analogie-aufgabe Rechen-gesetze, Rechenregeln	Lösen von all-gemein-gültigen Gleichungen: 2x+3=3x+2-x+1	arithmetische Gesetzmäßig-keiten mit Variablen ausdrücken	Gesetzmäßig-keiten entdecken und aufschreiben Formeln auf-stellen: z. B.: a<b und x>0 => ax<bx $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$
(un)-abhängige Variable	in Funktions-gleichungen einsetzen z.B.: x=3 in $y=2x^2-4x+2$		Funktions-gleichungen umformen	Nullstellen berechnen	Wertetafel; Wie verändert sich y, wenn x sich verdop-pelt?	unabhängige und abhängige Variable vertauschen
Formvariable	z.B.: p und q aus Normal-form der qua-dratischen Gleichung x^2 -x-3,5=0 bestimmen	z. B. in $(3x-2y)^2$ 3x durch a und 2y durch b ersetzen	z. B. bei Herleitung von Formeln Formeln umstellen	Gleichungen mit Form-variablen lösen Formeln auflösen	z. B. bei y =mx + b Bedeutung von m und b untersuchen	Beim Auf-stellen von Formeln Vari-able zum Teil konstant hal-ten, zum Teil variieren

Tabelle 4: Lörcher 1995a, S. 15

2.3. Terme

Die systematische unterrichtliche Behandlung von Termen und von Termumformungen tritt erst seit Beginn der Reform deutlich in den Vordergrund. Auf mathematische oder logische Beschreibungen und Klassifizierungen will ich hier verzichten. Für eine axiomatische Definition und mathematische Charakterisierung siehe z. B. Lauter (1964, S. 64 ff.) und Wäsche (1964). In diesem Abschnitt soll auf die Notation eingegangen werden und im Wesentlichen eine Beschreibung der Tätigkeiten im Zusammenhang mit Termen gegeben werden.

Notation

Die Schreibweise in der Algebra, die „Formelsprache“, ist historisch entstanden[35] und und beruht im Wesentlichen auf Konventionen.

Typischerweise werden im Unterricht und in Schulbüchern Aufgaben unter dem Gesichtspunkt „Termvereinfachung“ behandelt. Das verlangt, dass die Schülerinnen und Schüler mit den gültigen Konventionen vertraut sind.

So müssen die Schülerinnen und Schüler Folgendes wissen:

- in Produkten werden gleiche Variablen zu Potenzen zusammengefaßt,
- in Produkten werden verschiedene Variablen alphabetisch geordnet,
- in Produkten werden Koeffizienten zusammengefaßt und an den Anfang des Produkts geschrieben,
- das Malzeichen zwischen Zahl und Variablen sowie zwischen Variablen wird üblicherweise weggelassen,
- die 1 als Faktor wird meist weggelassen,
- anstelle von -1 als Faktor wird nur das "Minus"-Zeichen vor den Term gesetzt,
- zwischen Summen innerhalb eines Produkts (Klammem) werden die Malzeichen meist weggelassen,
- in Summen werden die Summanden aufsteigend oder absteigend geordnet, von den Summanden mit den kleinsten zu den höchsten Variablenpotenzen oder umgekehrt,
- in Summen wird, falls mehrere gleichrangige Variable vorkommen, gezählt, wie oft die Variable als Faktor vorkommt; bei gleicher Anzahl von Variablenfaktoren wird alphabetisch geordnet.

Zum Beispiel: $16a^3b^2 + 2a^2b^2 - 4ab^3 + 3a^3 - 7ab^2 - 5b^2 + 2ab - 3b^2 + 6a - 9b + 12$.

Ferner müssen die Schülerinnen und Schüler in diesem Zusammenhang spezielle Fachtermini kennen.

Nach der zuletzt auszuführenden Vorschrift nennt man Terme Summenterme (z. B. 3x + 5a –6), Produktterme (z. B. 2 (3x+4) (5x+2)) oder Funktionsterme

[35] zur historischen Entwicklung und Veränderung der „Formelsprache“ siehe z. B. Malle 1993, S. 34ff.

(z. B. sin(x)). Abweichend davon wird die Bezeichnung Bruchterm dann gebraucht, wenn in einem Term Variablenterme im Nenner vorkommen[36].

Unterrichtliche Behandlung

Lörcher beschreibt als Haupttätigkeiten im unterrichtlichen Umgang mit Termen

- das Einsetzen,
- das Umformen und
- das Verallgemeinern.

Das Einsetzen findet beim Einsetzen von Zahlen in Variablen, Ersetzen von Variablen durch Terme und Ersetzen von gleichen Termen durch Variablen statt. Das Einsetzen von Zahlen wird beim Überprüfen der Richtigkeit von Termumformungen, bei der Probe von Gleichungen und beim Erstellen von Wertetabellen verwendet, das Ersetzen von Variablen durch Terme zum Beispiel beim Einsetzungsverfahren beim Lösen von linearen Gleichungssystemen und das Ersetzen von gleichen Termen durch Variablen beim Anwenden von Rechengesetzen oder zum Beispiel bei der Anwendung der binomischen Formeln.

Das Umformen stellt üblicherweise den Schwerpunkt in der unterrichtlichen Behandlung dar – mit zwei unterschiedlichen Zielrichtungen: Termvereinfachung oder Konstruktionen einer bestimmten Form des Terms (z. B. „Faktorisieren“: aus einem Summenterm einen Produktterm konstruieren).
Die verschiedenen Arten der Termumformungen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division mit der zusätzlichen Komplexität Bruchterm und Ausklammern) erzeugen einen Kalkül, der nach Malle (1993, S. 15) „*als Kunst für sich, abgehoben von jeglicher inhaltlicher Bedeutung*“ behandelt wird. Das Verallgemeinern kann man beim Formulieren erkannter Gesetzmäßigkeiten benutzen, indem verschiedene Zahlen durch eine Variable ersetzt werden.

Die Tätigkeit des Verallgemeinerns möchte ich beispielhaft beschreiben, da sie in Schulbüchern üblicherweise nicht berücksichtigt wird und eine bisherige unterrichtliche Behandlung dementsprechend eher selten ist.
Verallgemeinern ist eine typische Vorgehensweise in der Mathematik, insbesondere in der Fachwissenschaft der Universitäten. Bevor algebraische Ergebnisse und Gesetzmäßigkeiten formuliert werden, steht häufig ein experimenteller und induktiver Prozeß, indem Vermutungen aufgestellt, getestet, eventuell verworfen, ersetzt oder modifiziert werden. Der entscheidende Vorteil auch für die Schule ist, dass man mit Variablen entdeckte Gesetzmäßigkeiten oder Muster in Kurzschrift festhalten kann. Hier kann sich die Stärke der Algebra besonders zeigen.

Lörcher hat unter Zuhilfenahme von Taschenrechnern Aufgabenvorschläge gemacht, mit denen man arithmetische Gesetzmäßigkeiten entdecken kann.

[36] vgl. Lörcher 1995a, S.16

Beispiel zu Quadratzahlen:
- Löse die ersten fünf Aufgaben zunächst mit dem Taschenrechner (TR)
- Vergleiche dann jede einzelne Aufgabe mit dem Ergebnis und versuche eine Gesetzmäßigkeit zu finden, um die nächsten Ergebnisse zu erraten.
- Berechne mit dieser Gesetzmäßigkeit die anderen Ergebnisse im Kopf (K) und kontrolliere sie mit dem Taschenrechner.
- Versuche zum Schluß eine Gesetzmäßigkeit aufzuschreiben.

$3{,}5^2$		TR
$6{,}5^2$		TR
$2{,}5^2$		TR
$7{,}5^2$		TR
$9{,}5^2$		TR
$5{,}5^2$		K
$1{,}5^2$		K
$8{,}5^2$		K
$4{,}5^2$		K
$0{,}5^2$		K
Gesetzmäßigkeit:		

50^2		TR
54^2		TR
51^2		TR
53^2		TR
59^2		TR
56^2		K
58^2		K
55^2		K
57^2		K
52^2		K
Gesetzmäßigkeit:		

49^2		TR
42^2		TR
48^2		TR
40^2		TR
45^2		TR
43^2		K
46^2		K
44^2		K
41^2		K
47^2		K
Gesetzmäßigkeit:		

Abbildung 21: Lörcher 1995a, S. 19

Funktionen raten

Gib Zahlen mit der beschriebenen Tastenfolge in den Taschenrechner ein. Arbeite die Tastenfolge bis zum Endergebnis ab. Vergleiche die Eingabe mit der Ausgabe und versuche einen Zusammenhang zu finden. Überprüfe deine Vermutung mit weiteren Zahlen. Versuche zum Schluß den gefundenen Zusammenhang aufzuschreiben.

Tastenfolge **Min + MR = 1/x ÷ MR = 1/x**		
Eingabe	Ausgabe	Gesetzmäßigkeit für Ausgabe in Abhängigkeit von Eingabe
1	2 =	
2	8 =	
10	=	
0,5	=	
x	y =	

Tastenfolge **Min 1/x - MR = 1/x ÷ MR = 1/x**		
Eingabe	Ausgabe	Gesetzmäßigkeit für Ausgabe in Abhängigkeit von Eingabe
	=	
	=	
	=	
	=	
x	y =	

Tastenfolge **1/x + 0,5 = 1/x – 2 = 1/x**		
Eingabe	Ausgabe	Gesetzmäßigkeit für Ausgabe in Abhängigkeit von Eingabe
	=	
	=	
	=	
	=	
x	y =	

Tastenfolge **1/x – 2 = 1/x + 0,5 = 1/x**		
Eingabe	Ausgabe	Gesetzmäßigkeit für Ausgabe in Abhängigkeit von Eingabe
	=	
	=	
	=	
	=	
x	y =	

Abbildung 22: Lörcher 1995a, S. 19

Vollrath (1994) sieht bei der Erarbeitung von Termumformungen folgende Schrittfolge[37]:

1. Schritt: Ordnen,
2. Schritt: Zusammenfassen,
3. Schritt: Klammern auflösen.

Zum Aufbau einer dazu gehörenden Unterrichtsequenz schlägt Vollrath eine „Stufung der Aufgaben“ vor, die sich an einer Steigerung der Komplexität dieser Aufgaben orientiert:

(1)	$2x + 3x =$
(2)	$6x - 3x =$
(3)	$-2x + 5x =$
(4)	$\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}x + \frac{1}{2}x =$
(5)	$-\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x =$
(6)	$2xy + 3xy =$
(7)	$-5x^2y + 7x^2y + 2x^2y =$
(8)	$-\frac{2}{3}x^2y - \frac{5}{6}x^2y + x^2y =$
(9)	$2(x + 1) + 3(x + 1) =$
(10)	$2(3x + y) + 5(3x + y) =$

Abbildung 23: Vollrath 1994, S. 106

Vollrath geht davon aus, dass Schülerinnen und Schüler bei Aufgaben zu Termumformungen erfolgreich sind, wenn sie die Struktur der Terme erfassen können. Einen wesentlichen Schwerpunkt im Bereich der Algebra und insbesondere im Bereich der Terme und der Termumformungen setzt Malle ebenfalls im Erkennen von Termstrukturen.

Dieses Strukturerkennen besitzt eine wichtige Bedeutung für den Unterricht, da es für das Umformen von Termen vorausgesetzt werden muss, insbesondere dann, wenn die dabei anzuwendenen Regeln bewußt benutzt werden sollen.

Eine Möglichkeit zur Strukturierung unter Beachtung der Hierarchie wäre die Verwendung von Baumdarstellungen, wie sie auch Vollrath (1994, S. 100) in ähnlicher Form vorschlägt:

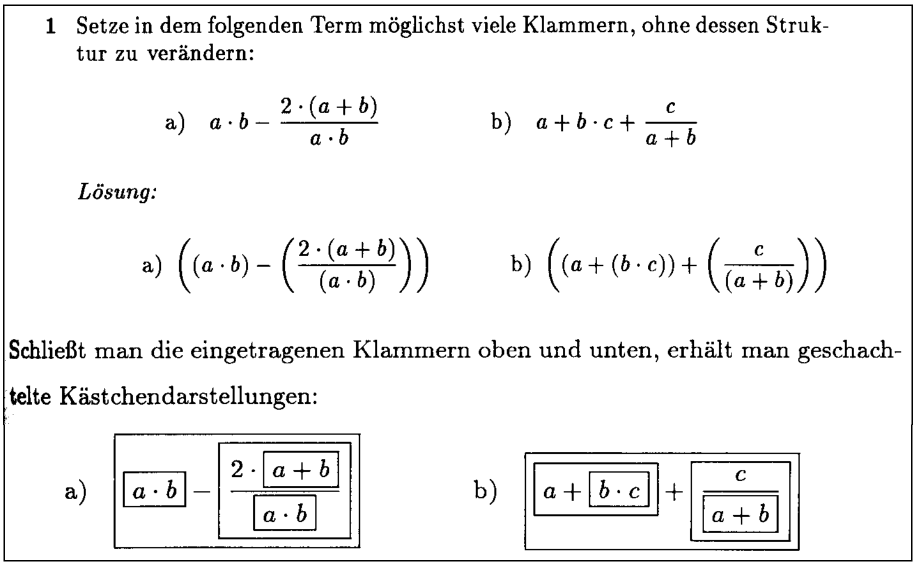
[37] s. Vollrath 1994, S. 103 ff.

$$5 \cdot a \;-\; 3 \cdot (x + 3 \cdot b) + (a + 6 \cdot b) \cdot (-2)$$

$$5a \quad -3x \quad -9b \quad -2a \quad -12b$$

$$3a - 21b - 3x$$

Um die Struktur von Termen deutlicher hervorzuheben, schlägt Malle als Visualisierungshilfe eine geschachtelte Kästchendarstellungen vor.



1 Setze in dem folgenden Term möglichst viele Klammern, ohne dessen Struktur zu verändern:

a) $a \cdot b - \frac{2 \cdot (a+b)}{a \cdot b}$ b) $a + b \cdot c + \frac{c}{a+b}$

Lösung:

a) $\left((a \cdot b) - \left(\frac{2 \cdot (a+b)}{(a \cdot b)}\right)\right)$ b) $\left((a + (b \cdot c)) + \left(\frac{c}{(a+b)}\right)\right)$

Schließt man die eingetragenen Klammern oben und unten, erhält man geschachtelte Kästchendarstellungen:

a) $\boxed{\boxed{a \cdot b} - \boxed{\frac{2 \cdot \boxed{a+b}}{\boxed{a \cdot b}}}}$ b) $\boxed{\boxed{a + \boxed{b \cdot c}} + \boxed{\frac{c}{\boxed{a+b}}}}$

Abbildung 24: Malle 1993, S. 255

Das Problem ist unter Beachtung der Schülersicht von Malle sehr gut beschrieben[38]. Problematisch ist allerdings, dass die dargestellten Visualisierungshilfen im eigentlichen Wortsinn tatsächlich Hilfen zur Visualisierung sein sollten. Die von Malle vorgeschlagene Kästchendarstellung eignet sich sicherlich zur Präsentation, dürfte allerdings bei der Verwendung durch die Schülerinnen und Schüler im Unterricht nicht zur Übersichtlichkeit beitragen.

[38] vgl. Malle 1993, S. 254 ff.

2.4. Gleichungen

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe ist das Beherrschen der Verfahren der Algebra von größter Wichtigkeit für den weiteren curricularen Ablauf. Ohne das Beherrschen des Lösens von linearen Gleichungen und von Termumformungen „funktionieren" Formelrechnen und Funktionsuntersuchungen nicht. Insbesondere Konzepte zu offeneren Unterrichtsformen und der immer wieder geforderten Anwendungsorientierung der Schulmathematik verlangen eine sichere Beherrschung dieser Fertigkeiten im Sinne von *basic skills*. Damit erhalten die Lösungsverfahren bei linearen Gleichungen eine besondere Aufmerksamkeit. Im folgenden Abschnitt sollen zuerst grundsätzliche Konzeptionen zur Gleichungslehre dargestellt werden. In einzelnen Teilabschnitten wird dann ausführlicher auf die damit verknüpften Aspekte Äquivalenzumformungen, Lösungsverfahren und entsprechende Notationen eingegangen. In einem letzten Teilabschnitt werden Vorschläge zur Einführung des Gleichungslösens gegenübergestellt. Als Veranschaulichung werden Schulbuchausschnitte verwendet.

Vollrath sieht das Lösen von Gleichungen insbesondere unter dem Aspekt des Lernens von Algorithmen[39]. Er geht davon aus, dass Schülerinnen und Schüler Gleichungen sicher und schnell lösen können, wenn sie über eine algorithmische Lösungsstrategie verfügen. Dazu gehört folgende Hierarchie:

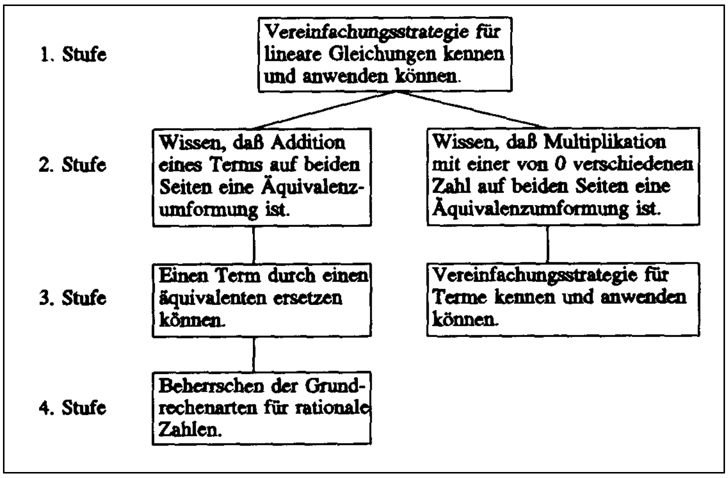


Abbildung 25: Vollrath 1994, S. 200

Das Entwickeln eines Algorithmus sieht Vollrath als eine kreative Leistung an. Da die Schülerinnen und Schüler seiner Ansicht nach eine Neigung zur Algorithmisierung besitzen, müsse diese gefördert werden. Ein reines Abarbeiten von Algorithmen, eine Überbetonung des kalkülhaften Lösens, kann allerdings „*zu einer geistigen Verödung der Klasse*" (Vollrath 1994, S. 201) führen und infolge dessen können Fähigkeiten wie Problemlösen und Erkennen von Zusammenhängen verkümmern.

Die Schülerinnen und Schüler sollten möglichst selbstständig Algorithmen entwickeln, wichtige Algorithmen sollten die Schülerinnen und Schüler beherrschen, der Algorithmus nie Selbstzweck sein. Vollrath unterteilt die Schulalgebra in die vier „*Themenstränge*" Zahlen, Terme, Funktionen und Gleichungen,

[39] vgl. Vollrath 1994, S. 199 f.

die in allen Jahrgangsstufen miteinander verflochten sind. Unter diesem Gesichtspunkt ordnet Vollrath den Bereich des Gleichungslösens auf verschiedenen Ebenen allen Jahrgangsstufen der Sekundarstufe I zu; in Klasse 5 durch Probieren, Überlegen und Gegenoperatoren im Zahlbereich der natürlichen Zahlen; in Klasse 6 und 7 durch Gegenoperatoren im Zahlbereich der Bruchzahlen; in Klasse 8 durch Äquivalenzumformungen[40].

Er geht davon aus, dass man in Klasse 5 an Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler aus der Grundschule anknüpfen kann, da dort bereits Aufgaben mit Variablen folgender Form gestellt werden: „*Beispiel: Bestimme die Zahl x.*
a) 3+5=x   b) 5+x=7   c) x+3=8 “ (Vollrath 1994, S. 208).
In Klasse 5 sollte noch nicht formal gelöst werden. Stattdessen würde eine Aufgabe übersetzt in Formulierungen wie z. B. *„Welche Zahl muß ich zu 5 addieren, um 7 zu erhalten?“* (Vollrath 1994, S. 208).
Auf drei Arten treten nach Vollraths Ansicht Gleichungen in allen Jahrgangsstufen auf: bei der Formulierung von Rechengesetzen, bei der Formulierung von Rechenaufgaben und bei Formeln. Die Behandlung in den verschiedenen Jahrgangsstufen unterscheidet sich lediglich in den verwendeten Zahlbereichen (in Klasse 5 $\mathbb{N}$, in Klasse 6 $\mathbb{B}$ und in Klasse 7 und 8 $\mathbb{Q}$).

Folgende Lösungsverfahren bieten sich nach Vollrath (1994, S. 210 f.) bereits für die 5. Jahrgangsstufe an:

	Beispiele
- gedankliches Lösen	(s.o.)
- Gegenaufgabe	$3 \cdot x = 12$ $12 : 3 = x$ $x = 4$
- Termvergleich	$3 \cdot x + 2 = 14$ $3 \cdot x + 2 = 12 + 2$ $3 \cdot x = 12$ $3 \cdot x = 3 \cdot 4$ $x = 4$
- Gegenoperatoren	$x \cdot 3 + 2 = 14$

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\cdot 3} & x \cdot 3 & \xrightarrow{+2} & x \cdot 3 + 2 \\ & & & & = \\ 4 & \xleftarrow{:3} & 12 & \xleftarrow{-2} & 14 \end{array}$$

$$x = 4$$

- Probieren

x	x·3 + 2	x·3 + 2 = 14
1	5	5 = 14
2	8	8 = 14
3	11	11 = 14
4	14	14 = 14

[40] vgl. Vollrath 1994, S.3

Insbesondere das Verfahren des Probierens bietet sich nach Vollrath bei Ungleichungen an.

Das Verfahren mit Gegenoperatoren kann in Klasse 8 dann dazu genutzt werden, um durch Drehen und alleinige Notierung der Umkehroperatoren das übliche Gleichungslösungsschema zu erhalten:

Beispiel:

$2x + 3 = 13$

Gelöst mit Gegenoperatoren

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\cdot 2} & 2x & \xrightarrow{+3} & 2x+3 \\ & & & & = \\ 5 & \xleftarrow{:2} & 10 & \xleftarrow{-3} & 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} & 2x + 3 & = & 13 & \\ -3 & & & & -3 \\ & 2x & = & 10 & \\ :2 & & & & :2 \\ & x & = & 5 & \end{array}$$

Abbildung 26: Vollrath 1994, S. 218 f.

Zur weiteren Erarbeitung zulässiger Umformungen bietet sich nach Vollrath trotz der Einschränkung auf positive Zahlen und der Schwierigkeit mit Multiplikation und Division das bekannte Waagemodell an. Ein entscheidender Vorteil ist (so Vollrath), dass das Waagemodell das grundsätzliche Prinzip deutlich macht. Die Umformungsregeln sollen allerdings allgemein als Eigenschaften rationaler Zahlen klargemacht werden und allgemein mit Variablen formuliert werden. Bei den ersten Übungen sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Umformungen mit Kommentaren wie Ordnen, Zusammenfassen, beidseitige Subtraktion von 3 usw. versehen.

Als Ziele formuliert Vollrath (1994, S. 222f):

1. sichere Beherrschung der Umformungsregeln,
2. Sicherheit bei der Erfassung von Gleichungs- und Ungleichheitstypen,
3. sichere Beherrschung von Lösungsstrategien,
4. Zielsicherheit bei Umformungen,
5. Beherrschen der Umkehrumformungen,
6. Schnelligkeit bei der Lösung von Gleichungen.

Auf ähnliche Weise stellt Weidig (1994) Grundzüge einer Konzeption der Gleichungslehre auf und fordert die Berücksichtigung der folgenden Aspekte:

- Beschränkung auf solche Begriffe, die zum Verständnis der logischen Struktur notwendig und beim Umgang mit Gleichungen und Ungleichungen nützlich sind.
- Orientierung der Abstraktion und Formalisierung an den sonstigen Inhalten des Mathematikunterrichts der jeweiligen Stufe bzw. Klasse.
- Verbindung der Gleichungslehre auch mit anderen Inhalten des Mathematikunterrichts, z. B. mit den algebraischen Eigenschaften der Verknüpfungen in den jeweiligen Zahlbereichen oder mit der Behandlung von Funktionen.
- Sinnvolle Betonung algorithmischer Aspekte beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen; vor allem sollte deutlich werden, welches Ziel ein solcher Algorithmus haben soll.
- Gleichungen und Ungleichungen sollten jeweils mit dem ,,intelligentesten" Verfahren gelöst werden.

Für das 5. Schuljahr steht nach Weidig das Rechnen mit natürlichen Zahlen und mit Größen im Vordergrund. „*Im Sinne der Durchdringung der Grundrechenarten ist sowieso davon die Rede, daß Addition und Subtraktion bzw. Multiplikation und Division zueinander Umkehroperationen darstellen. Was liegt daher näher, als Gleichungen wie* $x \cdot 3 + 4 = 19$ *so zu lösen?*

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\cdot 3} & x \cdot 3 & \xrightarrow{+4} & x \cdot 3 + 4 \\ & & & & = \\ 5 & \xleftarrow{:3} & 15 & \xleftarrow{-4} & 19 \end{array}$$

Die Lösung 5 kann hierbei ganz naiv (...) Ergebnis der Umkehroperationen aufgefaßt werden, womit zugleich der Funktionsaspekt vorbereitet wird.“ (Weidig 1994, S.39)

Im 7. Schuljahr sollten dann nach Weidig die Begriffe Aussage und Aussageform thematisiert werden und die Schülerinnen und Schüler können dann auch entdecken, dass es Gleichungen gibt, die keine Lösung besitzen. Hierin unterscheidet sich das Konzept von Weidig von dem von Vollrath, da dieser auf die Begriffsbildung Aussage wenig Wert legt und den Begriff Aussageform als überflüssig ansieht[41].

Bei beiden Konzepten steht eine mathematisch-inhaltliche Sichtweise im Vordergrund, die deutlich noch von den Ideen der „Neuen Mathematik“ geprägt ist.

Im Gegensatz dazu stellt Malle (1993) die Schülersicht in den Vordergrund.

[41] vgl. Vollrath 1994, S. 217

Malle sieht beim Gleichungslösen drei Komponenten, die zusammenspielen[42]:

- das Erkennen von Termstrukturen,
- die Anwendung von Regeln und
- heuristische Strategien.

Aufgrund seiner Untersuchungen kommt er zu dem Ergebnis, dass Schülerinnen und Schüler beim Umformen von Gleichungen und anderer algebraischer Ausdrücke selten Regeln benutzen. Aus diesem Grunde beschreibt er eine Möglichkeit, wie es gelingen kann, die Umformungsregeln für Gleichungen schülernah zu behandeln (siehe folgenden Teilabschnitt).

Äquivalenzumformungen

Als einer der entscheidenden Ansatzpunkte für die Reform des Mathematikunterrichts galt die Forderung nach Klarheit und Präzision der mathematischen Begriffe und Verfahren. Bis in die sechziger Jahre hinein bestand das Gleichungslösen wie bereits oben beschrieben aus der Anwendung entsprechender Regeln auf eine Reihe unterschiedlicher linearer Gleichungen[43]. Wenn man die Äquivalenzumformungen aufgrund der Tätigkeiten[44], die im Mathematikunterricht, also für die Schülerinnen und Schüler eine Rolle spielen, beschreibt, kommt man zu folgender Unterscheidung:

- Man kann auf beiden Seiten die gleiche Zahl addieren.
- Man kann auf beiden Seiten die gleiche Zahl subtrahieren.
- Man kann auf beiden Seiten mit der gleichen Zahl multiplizieren, aber man darf nicht mit 0 multiplizieren.
- Man kann auf beiden Seiten durch die gleiche Zahl dividieren, aber man darf nicht durch 0 dividieren.
- Man kann beide Seiten vertauschen.
- Man kann auf beiden Seiten die Gegenzahl bilden.
- Man kann auf beiden Seiten, falls sie nicht 0 sind, den Kehrwert bilden.

In den ersten vier Fällen kann man statt Zahlen auch Terme einsetzen.

Dies sind allerdings nur die Äquivalenzumformungen, die beide Seiten gleichzeitig betreffen. Zusätzlich dazu sind auf jeder Seite Termumformungen (Termzusammenfassungen) möglich.

- Man kann auf jeder einzelnen Seite Zahlen und Terme zusammenfassen.

---

[42] s. Malle 1993, S. 188 ff.

[43] für die „exakte(n)“ Definition(en) von Äquivalenzumformungen siehe z. B. Wäsche 1964 und Lauter 1964.

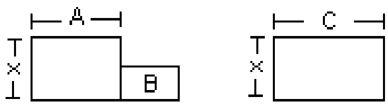
[44] Hier wird deutlich, welche Regeln die Schülerinnen und Schüler beherrschen müssen und an welcher Stelle eine mathematische Exaktheit und Präzision vermeintlich einfacher ist. Dies war auch einer der Ausgangspunkte der „neuen Gleichungslehre“.

Bei der Frage welche Visualisierung, welches Modell geeignet ist, um Äquivalenzumformungen zu veranschaulichen, dominiert sicherlich trotz seiner Beschränkungen das Waagemodell[45].

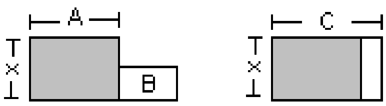
Den Effekt von konkreten Modellen für Äquivalenzumformungen von Gleichungen haben Filloy/Rojano (1989) untersucht. Sie haben dazu ein eigenes geometrisches Modell entworfen und mit dem Waagemodell verglichen und für jedes Modell fünf Lösungsschritte ausgezeichnet.

Beispiel: Gegeben ist die Gleichung in der Form Ax + B = Cx. A, B und C sind gegebene positive, ganze Zahlen und C ist größer als A.

Geometrisches Modell:
Schritt 1: übersetze die Gleichung in das Modell

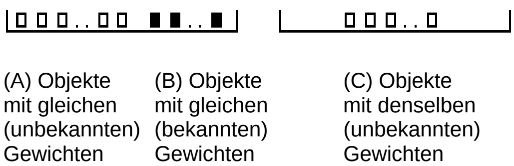


Schritt 2: vergleiche die Gebiete



Schritt 3: erzeuge die neue Gleichung (C – A)x = B
Schritt 4: löse die neue Gleichung
Schritt 5: überprüfe die Lösung

Waagemodell:
Schritt 1: übersetze die Gleichung in das Modell



Schritt 2: wiederholtes Wegnehmen von Paaren der unbekannten Gewichte, mit Erhalten des Gleichgewichts bis nichts mehr auf der linken Waagschale weggenommen werden kann

Schritt 3: schreibe die neue Gleichung (C – A)x = B
Schritt 4: löse die Gleichung
Schritt 5: überprüfe die Lösung

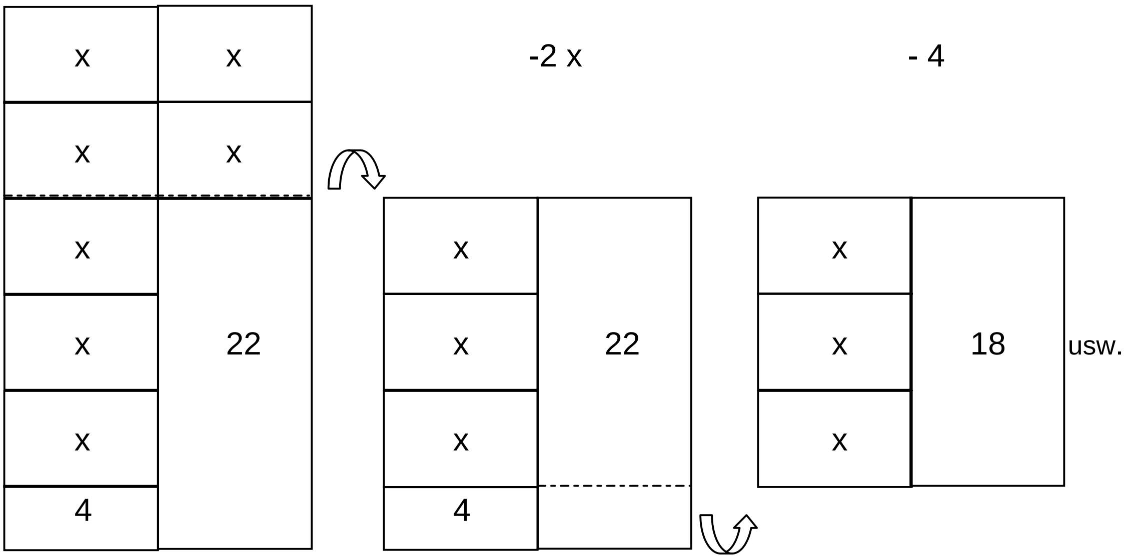
[45] s. z. B. Vollrath 1994

Filloy/Rojano kommen in ihrer Untersuchung zum Schluß, dass keines der beiden untersuchten Modelle dem anderen vorgezogen werden kann, beide haben ihre Vorzüge (der Schritt vom Lösen von Ax + B = Cx zu Ax + B = Cx + D ist im Waagemodell klein, während der Übergang zu Gleichungen der Form Ax – B = Cx im geometrischen Modell "Wegnehmen von Gebieten" besonders einfach ist).

Eine weitere Idee beschreibt Lörcher (1995b, S. 42). So kann ein Blatt Papier zur Veranschaulichung dienen.

Indem das Blatt in der Mitte (Längsrichtung) gefaltet wird, lassen sich linke Blatthälfte und rechte Blatthälfte als Gleichungsseiten interpretieren. Indem jetzt in Querrichtung ein Teil des Blattes weggefaltet wird, lässt sich das gleichzeitige „Wegnehmen“ auf beiden Gleichungsseiten veranschaulichen. Folgendes Beispiel soll die Vorgehensweise exemplarisch darstellen.

$5 \cdot x + 4 = 2 \cdot x + 22$



Auch dieses Modell versagt, wenn die Koeffizienten kleiner als Null sind. In der Anfangsphase ist es sicherlich sinnvoll, mit korrekten Skalierungen (Höhe des Feldes, das den Teilterm repräsentieren soll) zu arbeiten. Später kann man auf eine Skalierung verzichten; informelle Erfahrungen zeigen, dass dieses Modell für den Unterricht bedeutsam sein kann[46].

Auf syntaktischer Ebene unterscheidet Malle beim Gleichungslösen *Elementarumformungsregeln* und *Waageregeln*. (S. 219ff.)

[46] Lörcher nutzt diese Falttechnik mit diesem im Unterricht immer zugänglichen Material (z. B. Blatt DIN A4) auch im Bereich der Bruchrechnung.

Die *Elementarumformungsregeln* lauten:

Additive Elementarumformung: $A + B = C \Leftrightarrow \quad A = C - B$
Multiplikative Elementarumformung: $A \cdot B = C \Leftrightarrow \quad A = C : B \ (B \neq 0)$

Auch Regelvarianten der folgenden Art sind zugelassen:

$$A - B = C \Leftrightarrow A = C + B\,, \quad A = B + C \Leftrightarrow A - C = B$$
$$A : B = C \Leftrightarrow A = C \cdot B\,, \quad A = B \cdot C \Leftrightarrow A : C = B$$

Die Waageregeln in Malles Notation lauten:

$$A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$$
$$A = B \Leftrightarrow A - C = B - C$$
$$A = B \Leftrightarrow A \cdot C = B \cdot C \quad (C \neq 0)$$
$$A = B \Leftrightarrow A : C = B : C \quad (C \neq 0)$$

Obwohl im Unterricht üblicherweise die Waageregeln behandelt werden, hat Malle anhand von Schülerinterviews herausgefunden, dass die meisten Schülerinnen und Schüler beim praktischen Gleichungslösen im Sinne der Elementarumformungsregeln denken, dass sie „*Glieder auf die andere Seite geben*“ (Malle 1993, S. 222) und „*nicht auf beiden Seiten der Gleichungen dasselbe tun*“ (Malle 1993, S. 222). Daraus resultiert eine Diskrepanz zwischen dem, was sie im Unterricht sagen „müssen“ und dem, was sie tatsächlich denken.

Ein weiterer Vorteil der Elementarumformungsregeln ist der Zusammenhang mit dem Zahlenrechnen. Das illustriert Malle auf folgende Art:

$7 + 3 = 10 \Leftrightarrow 7 = 10 - 3$	$10 = 10 \Leftrightarrow 10 - 3 = 10 - 3$
$\vert \quad \vert \quad \vert \qquad \vert \quad \vert \quad \vert$	$\vert \quad \vert \qquad \vert \quad \vert \quad \vert \quad \vert$
$A + B = C \Leftrightarrow A = C - B$	$A = B \Leftrightarrow A - C = B - C$

Abbildung 27: Malle 1993, S. 221

Die linke Darstellung ist nach Malle eine bedeutsame Beziehung beim Rechnen mit Zahlen, während die rechte Darstellung aufgrund ihrer Trivialität keine Rolle spielt.

Der entscheidene Vorteil der Elementarumformungsregeln ist, dass jede nicht-triviale elementare Gleichung als eine der acht Formen

$$\begin{array}{lcl} A + B = C & \qquad & A = B + C \\ A - B = C & & A = B - C \\ A \cdot B = C & & A = B \cdot C \\ A : B = C & & A = B : C \end{array}$$

interpretiert werden kann. Welche Variante der Elementarumformungsregel ausgewählt wird, hängt von der Stellung der Variablen und der heuristischen Strategie ab, die von der Schülerin oder dem Schüler eingeschlagen wird.

„*Die Elementarumformungsregeln sind ‚termrespektierend‘, die Waageregeln sind ‚termneutral*‘ “ (Malle 1993, S. 224). Das bedeutet, dass sich die Umformungsstrategie in den Elementarumformungsregeln wiederspiegelt, während sie bei den Waageregeln nicht erkennbar ist.

Am Beispiel $x + y = 5 \Leftrightarrow x = 5 - y$ beschreibt Malle, dass die Anwendung einer Elementarumformungsregel sofort von der ersten zur zweiten Gleichung führt, während die Anwendung der entsprechenden Waageregel eigentlich eine weitere Gleichung verlangt: $x + y = 5 \Leftrightarrow x + y - y = 5 - y \Leftrightarrow x = 5 - y$. In der Praxis wird die zweite Gleichung üblicherweise aber nicht notiert. „*Das bedeutet aber, daß beim praktischen Denken die Waageregeln nicht exakt verwendet werden (obwohl dies fälschlicherweise oft angenommen wird). Eine unexakte Regelanwendung kann natürlich kein Unterrichtsziel sein*.“ (Malle 1993, S. 222)

Vorteile der Waageregeln sieht Malle, wenn sie nicht in der üblichen sondern in umgekehrter Richtung angewendet werden - als „Kürzungsregeln“ und in ihrer Erweiterbarkeit z.B. für Gleichungssysteme und Ungleichungen siehe folgende Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 7 = \dfrac{x+1}{2} + 7 & \qquad & A + C = B + C \Longleftrightarrow A = B \\ 2x = \dfrac{x+1}{2} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3(2x-1) = 3(x+1) & \qquad & A \cdot C = B \cdot C \Longleftrightarrow A = B \\ 2x - 1 = x + 1 & & \end{array}$$

Abbildung 28: Malle 1993, S. 225

Als Konsequenz folgert Malle: „*Die Elementarumformungsregeln sind für den Anfangsunterricht in elementarer Algebra geeigneter als die Waageregeln. Man kann sogar lange ohne die letzteren auskommen. Die Waageregeln bilden jedoch später eine durchaus sinnvolle Ergänzung*.“ (Malle 1993, S. 227).

Malle geht davon aus, dass in der 5. und 6. Jahrgangsstufe „*hauptsächlich Aufgaben zum Aufstellen und Interpretieren von Formeln in bedeutungsvollen Situationen gestellt werden*“ (Malle 1993, S. 236) und dabei Umformungen im Sinne von Umkehraufgaben in diesem Bereich des Sachrechnens behandelt werden. An dieser Stelle empfiehlt er die Einführung des Implikations- und des Äquivalenzzeichens (⇒ und ⇔) und die Erklärung der Lesart für diese Zeichen. Im 7. Schuljahr sollten dann die Elementarumformungsregeln eingeführt werden. Die Verwendung dieser Regeln sollte zweckmäßigerweise in mehreren Anläufen erarbeitet werden, und in der Anfangszeit sollten inhaltliches Umformen (ohne Regeln) und formales Umformen (mit Regeln) nebeneinanderstehen.
Bei der unterrichtlichen Behandlung dieser Regeln verlangt Malle die Formulierung von diesen Regeln mit Hilfe von Buchstaben. „*Das allgemeine Beschreiben bzw. Begründen von Umformungsschritten mit Hilfe von Buchstabenregeln kann helfen, Fehler zu vermeiden, ist aber auch ein erstrebenswertes Lernziel für sich*.“ (Malle 1993, S. 218). Um diese Buchstabenregeln von den unterrichtlich zu behandelnden Gleichungen und Formeln abzugrenzen, schlägt er die Verwendung von Großbuchstaben vor. Dadurch soll die *„Kontextfreiheit der Variablen ausgedrückt werden und damit der allgemeine Charakter der Regeln betont werden*“ (S. 220) und die Vorstellung erleichtert werden, dass nicht nur einzelne Zahlen und Buchstaben sondern auch komplexere Terme eingesetzt werden dürfen.

Das Entscheidende und wohl auch Neue an Malles Beschreibung ist, dass er dem Schüler-Lehrer-Dilemma (der Schüler oder die Schülerin sieht Umformungen bei Gleichungen als „Rüberbringen“, beim Lehrer oder bei der Lehrerin und in der Mathematik bedeutet Äquivalenzumformung „auf beiden Gleichungsseiten dasselbe tun“) Rechnung trägt und damit einen neuen Zugang in die didaktische Diskussion bringt. Bislang war es für die Unterrichtenden eine unbefriedigende Situation, dass etwas unterrichtet werden musste, was fachlich korrekt ist und von den Schülerinnen und Schülern trotzdem ignoriert wurde.

Trotzdem ist von didaktischer Seite dieser Vorschlag auf wenig Resonanz gestoßen. Lediglich im Schulbuch „Lehrbuch der Mathematik 3“ aus Österreich von 1994 hat dies einen wenn auch zaghaften Niederschlag gefunden.

3. Gleichungen werden durch Äquivalenzumformungen gelöst.

Beim Lösen von Gleichungen mittels Äquivalenzumformungen schreibt man ganz rechts an, was auf beiden Seiten der Gleichung gemacht wird.

Zum Beispiel bedeutet:
9x-12=6x-9 | - 6 x ... „Auf beiden Seiten 6 x subtrahieren"

Äquivalenzumformungen kann man auch durch die entsprechenden **Umkehroperationen** (durch „Hinüberbringen") deuten.

Zum Beispiel: a) 9x - 12 = 6x + 9 ⇔ 9x - 12 - 6x= 9
b) 3x = 21 ⇔ x = 21 : 3

Abbildung 29: Lehrbuch der Mathematik 3 (Reichel/Litschauer/Groß) 1994, S. 129

Unnötig erscheint allerdings, dass Malle ab Klassenstufe 7 die Formulierung der Elementarumformungsregeln zum Unterrichtsthema machen will. Besonders störend ist hierbei die neue oder zusätzliche Syntax mit der Großbuchstabenschreibweise und die Verwendung des Äquivalenzzeichens, das zum jetzigen Zeitpunkt (zum Glück) keine Rolle mehr im Unterricht spielt.

Notation

Bei der Schreibweise gibt es zwei mögliche Formen des Notierens der Äquivalenzumformung. Üblicherweise wird folgende Schreibweise verwendet, bei der auf der rechten Seite, durch einen senkrechten Strich abgetrennt, diese notiert wird; in aller Regel allerdings nur die ersten vier Fälle der oben beschriebenen Äquivalenzumformungen.

$$\begin{aligned} 3x - 8 &= 9x + 1 && |\ -3x \\ -8 &= 6x + 1 && |\ -1 \\ -9 &= 6x && |\ :6 \\ -1{,}5 &= x \end{aligned}$$

Ein Haupteinwand gegen diese Schreibweise ist die ungleiche Behandlung beider Seiten[47]. Gerade eine solche Schreibweise legt eine Interpretation im Sinne des „Rüberbringens“ nahe.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass es mir nicht gelungen ist, einen Zeitpunkt zu bestimmen, ab wann diese Notation im Unterricht Einzug gehalten hat. Ab Anfang der achtziger Jahre findet sich diese Schreibweise nahezu in allen Schulbüchern (vgl. Abbildung 9, 11 und 13). Vor der Reformbewegung wurde sie eigentlich nicht verwendet und im Zuge der Reform war sie ebenfalls nicht üblich. Allenfalls bei der Begründung der Umformung wurde neben der Gleichung eine Kurzform wie „7 addieren“ notiert (vgl. Abbildung 8). Bei intensiver Recherche zeigt sich, dass in den sechziger Jahren diese Schreibweise bereits in den Schulbüchern der DDR verwendet wurde und das Schulbuch Lambacher/Schweitzer aus dem Jahre 1955 sie ebenfalls benutzte.

Unabhängig davon, wann diese Schreibweise das erstemal verwendet wurde und auf wen sie zurückgeht, ist auffällig, dass die flächendeckende Verwendung dieser Schreibweise ohne didaktische Diskussion geschehen ist, insbesondere, wenn man berücksichtigt, dass gerade diese Schreibweise im Widerspruch zu der intendierten Vorstellung der Äquivalenzumformung steht.

Eine zweite Möglichkeit ist, die Umformungsschritte unter der Gleichung zu notieren[48]. Diese Schreibweise ist an einem Vorschlag von Herscovics/Kieran (1980, S. 578) angelehnt und findet sich in ähnlicher Form im Realschulbuch „Querschnitt Mathematik 7“ von 1994.

---

[47] vergleiche hierzu die Ausführungen von Malle beim Vergleich von Elementarumformungsregeln und Waageumformungsregeln

[48] s. Querschnitt Mathematik 7, S. 150, 1994

$$
\begin{array}{rcl}
3x - 8 & = & 9x + 1 \\
\underline{-3x} & & \underline{-3x} \\
-8 & = & 6x + 1 \\
\underline{-1} & & \underline{-1} \\
-9 & = & 6x \\
\underline{:6} & & \underline{:6} \\
-1{,}5 & = & x
\end{array}
$$

Beispiele:	$-58 = a - 47$	$18 + b = 23$	$c : 4 = 2{,}4$	$13{,}5 = 4{,}5 \cdot d$
Umformung	$\underline{+47 \quad +47}$	$\underline{-18 \quad -18}$	$\underline{\cdot 4 \quad \cdot 4}$	$\underline{: 4{,}5 \quad : 4{,}5}$
Lösung	$-11 = a$	$b = 5$	$c = 9{,}6$	$3 = d$
oder kürzer:	$-58 = a - 47 \mid +47$	$18 + b = 23 \mid -18$	$c : 4 = 2{,}4 \mid \cdot 4$	$13{,}5 = 4{,}5 \cdot d \mid : 4{,}5$
	$-11 = a$	$b = 5$	$c = 9{,}6$	$3 = d$

Abbildung 30: Querschnitt Mathematik 7 1994, S. 150

Ein Vorteil dieser Möglichkeit ist, dass beide Seiten der Gleichung gleich behandelt werden. Außerdem lassen sich die additiven Umformungen im Sinne der Addition und Subtraktion analog zu den schriftlichen Verfahren interpretieren. Ferner ist diese Darstellung mit dem Additionsverfahren beim Lösen von Gleichungssystemen, wenn dieses unbedingt unterrichtlich behandelt werden soll, verträglich. Das Dividieren und die Multiplikation von Zahlen oder gar von Termen ist auch in dieser Schreibweise problematisch. Die für das Lösen von einfachen linearen Gleichungen (z. B.: $ax + b = cx + d$) benötigten Äquivalenzumformungen, lassen allerdings zumindest eine Einführung der Schreibweise beim Gleichungslösen sinnvoll erscheinen. In diesem Sinne kann man dann zu der üblichen Schreibweise als kürzere Form nach der Einführung übergehen. Untersuchungen, inwieweit eine Einführung über die zweite Darstellung Fehler zu vermeiden helfen kann, fehlen zur Zeit noch, insbesondere, da das Schulbuch „Querschnitt“ vergleichsweise neu ist und kaum Unterrichtserfahrungen vorliegen[49].

Einführung des Gleichungslösens

Typische Vorgehensweise bei der Einführung des Lösens von Gleichungen sind „guess and test"-Methoden. Diese beinhalten Zahlenersetzungen und Methoden wie „cover up" (abdecken) und „undoing" (Rückwärtseinsetzen)[50].

Beispiel zu „cover up": $14 - x = 8$

Das x wird abgedeckt:
$14 - \square = 8$ „14 minus welche Zahl ergibt 8?"

[49] Erste informelle Rückmeldungen nach der unterrichtlichen Behandlung im 8. Jahrgang einer Integrierten Gesamtschule in Braunschweig im Schuljahr 1997/98 geben allerdings Anlass zu dieser Vermutung.

[50] vgl. Bernard/Cohen 1988, S. 99ff.; Beispiel zu "working backward": siehe unten (Lörcher).

Die „cover-up"-Methode versagt bereits, wenn x mehrmals in der Gleichung auftritt und sollte nach Bernard/Cohen[51] durch geeignetere Methoden ergänzt werden.

Trotz ihrer Einschränkungen sollte nach Bernard/Cohen[52] diese Methode allerdings unterrichtlich behandelt werden, da sie das bisher Gelernte einbindet und genutzt werden kann, um das Lösen von Gleichungen mit Äquivalenzumformungen zu erlernen.

Kurz nach dieser Einführung werden die Schülerinnen und Schüler nach Kieran (1992) üblicherweise in formalen Verfahren unterrichtet. Die verschiedenen Typen, die Schülerinnen und Schüler dabei verwenden, fasst Kieran wie folgt zusammen[53]:

(a) use of number facts
(b) use of counting techniques
(c) cover-up
(d) undoing (or working backwards)
(e) trial-and-error substitution
(f) transposing (that is, Change Side – Change Sign)
(g) performing the same operation on both sides

Die ersten beiden Möglichkeiten werden üblicherweise nicht unterrichtet, und die beiden letzten sind die üblichen formalen Methoden. Das trial-and-error-Einsetzen (von unterschiedlichen Zahlen für die Variable) ist eine zeitaufwendige Methode und wird nach Behandlung der formalen Methoden üblicherweise nicht mehr genutzt.

Kieran weist ausdrücklich darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler, die in der Anfangsphase die trial-and-error-Methode benutzten, eine bessere Vorstellung der Balance zwischen linker und rechter Seite besitzen als Schülerinnen und Schüler, die diese Methode nicht verwendeten.

Lörcher (1995a, S. 20) ergänzt das Modell von Vollrath zum Einführen des Lösens von Gleichungen wie folgt:

[51] vgl. Bernard/Cohen 1988, S. 101
[52] vgl. Bernard/Cohen 1988, S. 103
[53] vgl. Kieran 1992, S. 400

Die Gleichung $(28-5\cdot\frac{3x-7}{4})\cdot 3=54$

wird zu

$$x \xrightarrow{\cdot 3} 3x \xrightarrow{-7} 3x-7 \xrightarrow{:4} \frac{3x-7}{4} \xrightarrow{\cdot 5} 5\cdot\frac{3x-7}{4} \xrightarrow{\pm} -5\cdot\frac{3x-7}{4} \xrightarrow{+28} 28-5\cdot\frac{3x-7}{4} \xrightarrow{\cdot 3} 3\cdot(28-5\cdot\frac{3x-7}{4})$$

Lösung $=$

$$5 \xleftarrow{:3} 15 \xleftarrow{+7} 8 \xleftarrow{\cdot 4} 2 \xleftarrow{:5} 10 \xleftarrow{\pm} -10 \xleftarrow{-28} 18 \xleftarrow{:3} 54$$

Abbildung 31: Lörcher 1995a, S. 20

Indem man die Gleichung so aufschreibt, dass vorn die Variable notiert wird und dann alle Operationen folgen, die durchgeführt werden, wird die Lösungsstrategie sofort sichtbar. Alle Operationen werden in umgekehrter Reihenfolge invertiert.

Die Pfeilschreibweise ist hier besonders günstig, da dabei keine Klammern benötigt werden. Diese Darstellung eignet sich gut für die Lösung von Zahlenrätseln.

Eine entsprechende Aufgabenstellung könnte lauten:
„Ich denke mir eine Zahl, verdreifache sie, ziehe sieben ab, teile das Ergebnis durch vier, verfünfache und ziehe das erhaltene Ergebnis von 28 ab, verdreifache und erhalte 54. Wie lautet meine Zahl?“
Solche Zahlenrätsel werden schon im Grundschulunterricht behandelt. Allerdings versagt dieses Verfahren bei Gleichungen, bei denen die Variable mehrfach auftritt. Wenn man obige Darstellung um 90° dreht, erhält man das übliche Lösungsschema[54]:

Außerdem kann man mit dieser Vorgehensweise den Term auf der linken Seite von unten nach oben aufbauen.
Auf der linken Seite kann man sehen, wie der linke Term der Gleichung „entstanden“ ist.
Auf der rechten Seite kann man durch schrittweises Rückgängigmachen der Pfeile nach und nach rekonstruieren, welcher Wert von x gemeint ist. Von oben nach unten wird die Ausgangsgleichung nach und nach in einfachere Gleichungen umgeformt und schließlich gelöst.
Wie schon oben erwähnt, funktioniert diese Darstellung nur, wenn die Variable in der Gleichung lediglich einmal vorkommt.

[54] Das Raster soll bedeuten, dass dieser Teil mit einem Blatt Papier abgedeckt wird.

Aufbau:

$$3x$$
$\cdot 3 \uparrow$
$$x$$

$$3x - 7$$
$-7 \uparrow$
$$3x$$
$\cdot 3 \uparrow$
$$x$$

Abbau:

$$\left(28 - 5 \cdot \frac{3x-7}{4}\right) \cdot 3 = 54$$
$\cdot 3 \uparrow$ $\quad$ $\downarrow : 3$
$$\left(28 - 5 \cdot \frac{3x-7}{4}\right) = 18$$
$+ 28 \uparrow$
$$-5 \cdot \frac{3x-7}{4}$$
$\pm \uparrow$
$$5 \cdot \frac{3x-7}{4}$$
$\cdot 5 \uparrow$
$$\frac{3x-7}{4}$$
$: 4 \uparrow$
$$3x - 7$$
$-7 \uparrow$
$$3x$$
$\cdot 3 \uparrow$
$$x$$

$$\left(28 - 5 \cdot \frac{3x-7}{4}\right) \cdot 3 = 54$$
$\cdot 3 \uparrow$ $\quad$ $\downarrow : 3$
$$\left(28 - 5 \cdot \frac{3x-7}{4}\right) = 18$$
$+ 28 \uparrow$ $\quad$ $\downarrow -28$
$$-5 \cdot \frac{3x-7}{4} = -10$$
$\pm \uparrow$
$$5 \cdot \frac{3x-7}{4}$$
$\cdot 5 \uparrow$
$$\frac{3x-7}{4}$$
$: 4 \uparrow$
$$3x - 7$$
$-7 \uparrow$
$$3x$$
$\cdot 3 \uparrow$
$$x$$

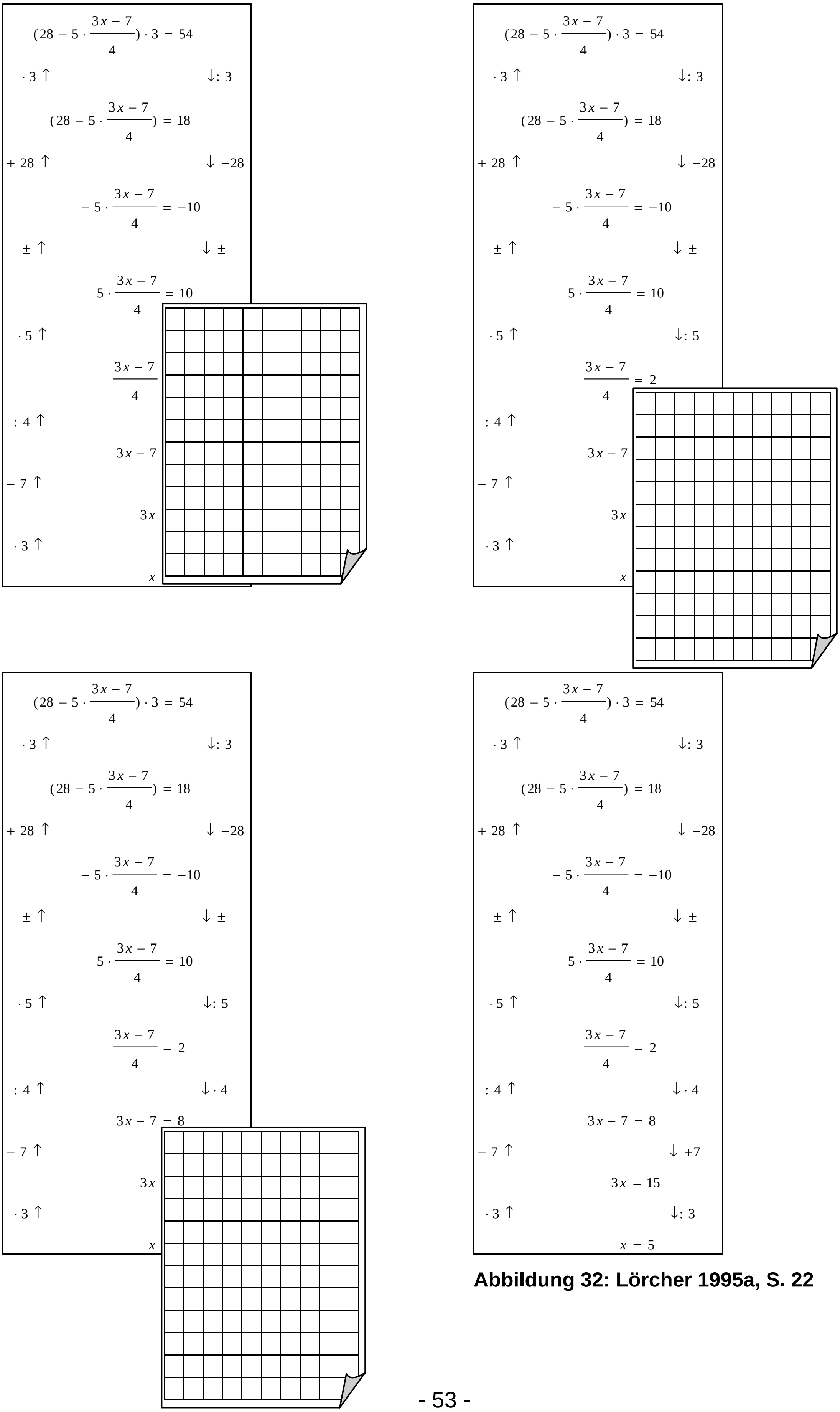


Abbildung 32: Lörcher 1995a, S. 22

3. Lehr- und Lernschwierigkeiten

Im folgenden Kapitel soll ein Überblick über Lehr- und Lernschwierigkeiten im Bereich der Schulalgebra gegeben werden. Dazu wird im erstem Teilkapitel ein Einblick in die Fehleranalyse bzw. deren verschiedene Vorgehensweisen gegeben. Im zweiten Teilkapitel wird auf die Konstruktion von Aufgaben bei Untersuchungen zur Fehleranalyse eingegangen. Im dritten Teil soll dann ein kurzer Überblick über Theorien bzw. Modelle zum kognitiven Verhalten der Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten von mathematischen Aufgaben gegeben werden. Wie im ersten Teilkapitel werden hierbei nicht nur algebraische Bereiche betrachtet. Im vierten Teilkapitel wird ein Überblick über Lehr- und Lernschwierigkeiten im Bereich der Schulalgebra gegeben. Das fünfte Teilkapitel beschäftigt sich mit Lehr- und Lernschwierigkeiten im Zusammenhang mit dem Gleichungslösen. Besonders ausführlich wird dabei die Arbeit von Matz (1980, 1982) behandelt. Untersuchungen zu Teilaspekten beim Gleichungslösen werden im sechsten Teilkapitel mit bzw. auch ohne entsprechende quantitative Auswertungen kurz zusammengestellt. Diese dienen der Einordnung und Abgrenzung der eigenen Untersuchung.

Lernschwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern können eine Vielzahl von Ursachen haben; sie können in der einzelnen Person begründet sein, sie können von der Lerngruppe abhängig sein, sie können mit der Lehrperson zusammenhängen, sie können vielfältige kulturelle oder gesellschaftliche Ursachen haben, und sie können ursächlich mit dem Lerngegenstand zusammenhängen. Je nach Ansatz wird man unterschiedliche Erklärungen, Deutungen und Theorien verwenden oder entwickeln. Individuelle Betrachtungen oder Gruppenbetrachtungen verlangen entsprechend stärker lern- und kognitionspsychologische, soziologische oder pädagogische Ansätze. Auf den Lerngegenstand (die Mathematik) gerichtete Betrachtungen verlangen stärker mathematikdidaktische Zugänge.

Ich werde mich auf Lernschwierigkeiten, die ursächlich mit dem Lerngegenstand, mit der Schulmathematik und im speziellen mit der Algebra zusammenhängen, beschränken.

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I stellt analog zu der Einführung der negativen Zahlen der Übergang von der Arithmetik zur Algebra eine unterrichtliche Situation dar, die kaum oder gar nicht an die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler anknüpft, wo der Realitätsgehalt für die Schülerinnen und Schüler auf den ersten Blick gering und das vollständige Beherrschen der damit zu entwickelnden Verfahren von größter Wichtigkeit für den weiteren curricularen Ablauf ist.

Der Bereich der Algebra ist für die Schülerinnen und Schüler mit einer Vielzahl von Fehlvorstellungen und häufig mit Misserfolgen verknüpft.

Dies betrifft z. B. den Umgang mit Variablen und Termen. Untersuchungen zu Fehlern und Fehlvorstellungen stellen hierbei die Semantik in den Vordergrund ihrer Betrachtung.

Das Verfahren zum Lösen von Gleichungen ist ebenfalls fehleranfällig. Untersuchungen hierzu stellen die Syntax, den Kalkül in den Vordergrund ihrer Betrachtung.

Damit lässt sich eine erste grundsätzliche Unterscheidung bei der Untersuchung von Lehr- und Lernschwierigkeiten in der Schulmathematik treffen:

- Fehler bzw. Fehlvorstellungen auf der semantischen, der begrifflichen Ebene;
- Fehler bzw. Fehlvorstellungen auf der syntaktischen Ebene, bei der Notation, beim Ausführen von Algorithmen, beim Kalkül.

Sicherlich ist es nicht zulässsig, bei Fragestellungen zum Lösen von kalkülhaften Aufgaben, Fehler nur der syntaktischen Ebene zuzuordnen. Genauso wenig ist es zulässig, bei Fragestellungen zur Begrifflichkeit, z. B. zu Vorstellungen zum Variablenbegriff bei Schülerinnen und Schülern, nur die semantische Ebene zu betrachten, da es in diesem Fall unabdingbar ist, Aufgaben und ihre Behandlung zu analysieren[55].

Trotz allem kann man, insbesondere wenn man die Analyseebene mit einbezieht, Untersuchungen zu semantischen Aspekten und Untersuchungen zu syntaktischen Aspekten unterscheiden.

Wenn man die Betrachtung auf ursächlich in der Algebra begründete Lernschwierigkeiten und dort auf die syntaktische Ebene beschränkt, wie dies aus mathematikdidaktischer Sicht sinnvoll sein kann, bleibt immer noch folgende Unterscheidung:

- die Schwierigkeiten lassen sich abhängig von der Komplexität der Aufgabe erklären (mathematisch-inhaltliche Sicht)
- die Schwierigkeiten lassen sich aus der Sicht der Schülerinnen und Schüler erklären (Schülersicht)

Beim Betrachten der Schwierigkeiten kann man produkt- oder prozessorientiert vorgehen. Das heißt, man betrachtet z. B. nur das Ergebnis einer Aufgabe (im Sinne von falsch/richtig oder wie-falsch/richtig) oder man betrachtet den gesamten Lösungsprozess beim Aufgabenlösen.

3.1. Fehleranalyse

Innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung nimmt die Fehleranalyse seit geraumer Zeit einen beachtlichen Stellenwert ein[56]. Dabei bedeutet Fehleranalyse zweierlei: erstens das Erkennen eines Fehlers und zweitens eine Ursachenbeschreibung oder besser eine Vermutung über die Ursachen. Sowohl bei der Begriffsklärung als auch bei der Modellierung der Fehlerursachen lassen sich verschiedene Ansätze unterscheiden; diese werden kurz vorgestellt.

---

[55] siehe z. B. Küchemanns Items 1981, S. 102 ff.
[56] Für einen historischen Überblick der Fehleranalyse bis 1979 siehe Radatz 1979.

Der übliche Ansatzpunkt der Fehleranalyse ist, dass Fehler nicht aus Flüchtigkeit gemacht werden und „*einem zufälligen oder launenhaften Verhalten der Schüler entspringen, sondern durchweg auf individuelle und für die Schüler sinnerfüllende Regeln und Lösungsstrategien mit jeweils sehr sensiblen Ursprüngen beruhen*." (Radatz 1980, S. 3).
Dies ist die Grundvoraussetzung für jede Fehleranalyse. Wären Fehler zufällig, gäbe es keine sinnvolle Ursache und damit wäre eine Fehleranalyse, die nicht nur die Fehler typisiert, sondern auch die Ursachen anlysieren will, sinnlos.

Unabhängig von dem, was im konkreten Fall ein Fehler ist, gibt es zur Typisierung von Fehlern in der mathematikdidaktischen Diskussion unterschiedliche Sichtweisen.

Padberg[57] unterscheidet neben Flüchtigkeitsfehlern „*typische*" und „*systematische*" Fehler. Ein *systematischer* Fehler liegt vor, wenn dieser von einem Schüler bei einem, allen oder zumindest bei vielen Aufgaben eines Aufgabentyps gemacht wird. *Typische* Fehler liegen vor, wenn sie häufig gemacht werden. Padberg geht davon aus, dass gerade systematische Fehler gut „*bekämpft*" werden können *und „so relativ rasch große Erfolge erzielt werden können*" (Padberg 1996, S,56).

Aufgrund seiner Untersuchungen formuliert er vier Thesen:

These 1: Eine gründliche Analyse fehlerhaft gelöster Aufgaben kann dazu beitragen, ein Widerstandsniveau gegen verbreitete fehlerhafte Strategien aufzubauen.
These 2: Fehleranalysen können helfen, Rechenverfahren zu optimieren.
These 3: Fehleranalysen können dazu beitragen, eine rational begründete Entscheidung zwischen verschiedenen methodischen Konzeptionen zu treffen.
These 4: Fehleranalysen können Lehrer für Effekte ihres Unterrichts sensibilisieren.

Damit spricht Padberg den unterrichtspraktischen Nutzen von Fehleranalysen an.

Fehler treten auf ganz unterschiedliche Weise auf; z. B. beim Ausführen eines Lösungsalgorithmus oder beim Aufrufen von Faktenwissen.

Aus mathematischer Sicht ist es vermeintlich einfach zu entscheiden, was ein Fehler ist und was nicht. Aus Schülersicht ist dies nicht mehr so leicht möglich. Die Schülerinnen und Schüler müssen zusätzlich zum Mathematisch-Inhaltlichen immer im Blick behalten, was von der Lehrerin, dem Lehrer intendiert ist. So war während der „Neuen Mathematik" in der Gleichungslehre z. B. das Ergebnis „x = 3" sicherlich zumindest nicht richtig, wenn nicht sogar falsch, da ja

[57] vgl. Padberg 1996, S. 56ff.

als Ergebnis eine Lösungsmenge notiert werden musste. Wer beim Bearbeiten kein Äquivalenzzeichen notierte, bekam dies sicherlich auch als Fehler vermerkt. Jeder Unterrichtende kennt bestimmt diese Situation bei Klassenarbeiten oder Klausuren, wo „Punkte abgezogen" werden, wenn die Schreibweise nicht korrekt war.

Fehler sind kontextabhängig, normativ - obwohl keine eindeutige und allgemein akzeptierte Definition existiert, was in einem konkreten Fall ein Fehler ist und „negativ-konstruiert“ - ein Fehler ist all das, was nicht richtig ist.

Insgesamt dürfte ein unausgesprochener Konsens darüber herrschen, was ein Fehler ist und was nicht.

Bei der Fehleranalyse kommt zur deklarativen Beschreibung des Fehlers und dem Erkennen des Fehlers zusätzlich eine Ursachenbeschreibung oder zumindest eine Beschreibung der vermuteten Ursachen hinzu. Dies verlangt die Beachtung des gesamten Lösungs- bzw. Fehlerprozesses.

Wellenreuther (1986) unterscheidet aus methodischer Sicht zwei verschiedene Arten der Fehleranalyse:

- die deskriptive Fehleranalyse und
- die kognitive Fehleranalyse (besser: kognitionstheoretisch orientierte Fehleranalyse).

Bei der deskriptiven Fehleranalyse wird üblicherweise mit Hilfe von diagnostischen Tests das Lösen von Aufgaben in schulmathematischen Teilbereichen[58] beschrieben. Dabei wird versucht *„objektive Fehlerursachen*“ durch Analyse der schriftlichen Schülerlösungen zu diagnostizieren[59].

Die Fehlerbeschreibung und -kategorisierung erfolgt inhaltlich-mathematisch - aus Expertensicht. Im Vordergrund stehen Verfahrensfehler (bei algorithmischen Aufgaben) und/oder Defizitfehler (Abweichungen vom intendierten Lösungsprozess).

Ein entscheidender Vorteil vom deskriptiven Zugang ist die Möglichkeit, Fehler nur mit Hilfe der (schriftlichen) Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler zu analysieren. Damit sind einerseits größere Untersuchungen (mit großer Stichprobenanzahl) möglich, anderseits besteht die Möglichkeit Unterrichtsmethoden und verschiedene curriculare Zugänge zu mathematischen Teilbereichen zu vergleichen[60].

[58] z. B.: Gerster 1982, Schriftliche Rechenverfahren; Lörcher 1987, Addition und Subtraktion von Termen; Lörcher 1982, Bruchrechnung

[59] vgl. Gerster 1982, S. 20

[60] vgl. Hasemann 1986

Ein Nachteil ist, dass individuelle Fehlerprozesse praktisch nicht analysiert werden können, insbesondere nicht die ihnen zugrundeliegenden kognitiven Prozesse.

Dies wird mit der kognitiven Fehleranalyse[61] versucht. Ziel dieser ist es die subjektiven und individuell unterschiedlichen Ursachen für Fehlerprozesse zu analysieren. Da dies mit Hilfe von schriftlichen Protokollen des Lösens nur unzureichend möglich ist, sind verwendete Methoden das „*klinische Interview*", „*lautes Denken*" und „*concept mapping*".

Die mit Hilfe von Einzelfalluntersuchungen entwickelte Theorie kann dann im Rahmen von weiterführenden quantitativen Untersuchungen im Sinne einer Hypothesenüberprüfung getest werden. Tietze (1988) hat dies im Bereich der Algebra getan.

Ausgangspunkt bei der kognitiven Fehleranalyse sind unterschiedliche Modellierungen und Theorien. Radatz (1980, S. 37ff.) geht von Fehlerursachen bei der Informationsaufnahme und Informationsverarbeitung aus, Hasemann (1986) verwendet das Modell der „*hypothetischen Mechanismen*" von Davis und McKnight (1979, Davis 1980)[62], Tietze (1988)[63] und Malle (1993)[64] entwickelten eigene Modelle für den Bereich der Algebra. Diese Modelle werden später kurz vorgestellt.

Mit der Entwicklung der kognitiven Fehleranalyse war die Entwicklung von kognitionspsychologischen Modellen[65] verbunden und auch der Einsatz von Rechnern und künstlicher Intelligenz (KI).

Insbesondere Wellenreuthers Artikel (1986) ist als grundsätzliche Kritik an der kognitiven Fehleranalyse interpretiert wurden und hat eine Reihe von Erwiderungen nach sich gezogen.

Lorenz (1987a, S. 221 f.) beschreibt in diesem Zusammenhang drei Schritte der historischen Entwicklung der kognitiven Fehleranalyse und damit auch der

[61] z. B. Hasemann 1986 zur Bruchrechnung; Lorenz 1987 zur Rechenschwäche

[62] Davis / McKnight (1979) unterscheiden sequentielle Prozesse (Prozedur, "visually-moderated-sequence") und "*integrated sequence*"), Gestaltprozesse (Schemata und Meta-Language (beinhaltet u. a. die Etiketten zum Aufruf von Schemata)) und "*deeper-level-rules*" (Regeln, die Regeln erzeugen).

[63] Tietze (1988) benannte Probleme, die im Zusammenhang mit dem Aufruf einer Prozedur verbunden sind: Prozeduren, die falsch sind, Prozeduren mit zu weiten Eingangsmerkmalen, Prozeduren mit zu engen Eingangsmerkmalen, Prozeduren, die Teil eines problematischen Schemas sind (Tietze 1988, S.289).

[64] Malle (1993) zählt folgende Fehler beim Aufruf, bei der Verarbeitung und der Anwendung von Schemata auf: Übergeneralisieren, unzulässiges Linearisieren, Verwendung inadäquater Schemata, Bildung unpassender Bedarfsschemata durch Metasprache, Rückgriff auf allgemeine Lebensweisheiten, Verwendung zu offener Schemata, Verwendung unpassender Ersatzschemata, Interferenz von Schemata, Nichtbeachtung von Prozedurhierarchien und Ausführungsstörungen.

[65] siehe hierzu den Übersichtsartikel von Hasemann 1988, vgl. auch Brown / VanLehn 1980, Davis / McKnight 1979, Küchemann 1981, Malle 1993, Tietze 1988

grundsätzlichen Arbeitsweise: „*In einem ersten Schritt wurde versucht, beobachtete Fehler zu beschreiben und hierfür brauchbare Kategorien zu entwikkeln. Äußerlich erscheint dies als Klassifikation curricularer Feinschritte,... . Die Klassifikation von Schülerfehlern, die im ersten Schritt für Schülergruppen entwickelt wurden, wird im zweiten Schritt für einzelne Schüler weiterentwickelt, d. h. es wird untersucht, ob die für eine Population charakteristischen Fehlerkonfigurationen auch für einen einzelnen Schüler Bestand haben. ... Im dritten Schritt werden die den (Fehl-) Lösungen des einzelnen Schülers unterliegenden Denkprozesse erhoben*."

Der erste Schritt ist wichtig für eine Theoriebildung, um mit den dabei gebildeten Fehlermustern Hypothesen zur Verursachung zu gewinnen.

Diese Hypothesen können im zweiten und dritten Schritt im Rahmen von Einzelfalluntersuchungen überprüft und angepaßt werden. Zu den dabei verwendeten Methoden gehören das „*Laute Denken*" und „*Protokollanalysen".*

Das dadurch entwickelte Modell der kognitiven Prozesse der Schülerin bzw. des Schülers zum Zeitpunkt der Fehleranalyse kann dann anhand der zu treffenden Vorhersagen beim Lösen von weiteren Aufgaben überprüft werden.

Umgekehrt ist die deskriptive Fehleranalyse auch immer wieder kritisiert wurden. So verlangt z. B. Hoppe (1987, S. 20) und bezieht sich auf Sommer (1982, S. 186 ff.), dass die zu bildenden Fehlerkategorien für die Fehleranalyse über die verschiedenen Aufgabentypen in inhaltlichem Zusammenhang stehen sollten. Klassifikationen wie die von Gerster (1982) seien lediglich eine Menge von Spezialfällen und damit „*bestenfalls für Fehlersammlungen"* geeignet.

Aufgabenanalyse

Eine andere Unterscheidung der Fehleranalysen kann man treffen, wenn man die Aufgaben, die bearbeitet werden, betrachtet. Das betrifft also die eigentliche Testkonstruktion. Eine solche Aufgabenanalyse ist unabdingbar, um die zugrundeliegenden Lösungsprozesse so genau wie möglich zu analysieren und zu beschreiben.

Die Testkonstruktion, die Analyse der zu untersuchenden Aufgaben lässt sich unterscheiden bzgl. der Theorie bzw. des Modells, das zugrunde gelegt wird.

Grundsätzlich ist es möglich, sowohl mit psychologischen Modellierungen als auch aus Expertenwissen, Hypothesen über Schwierigkeitsdimensionen der Aufgaben zu entwickeln. Diese können empirisch abgesichert sein – mit Hilfe von quantitativen Untersuchungen oder durch Einzelfallstudien.

Hierbei kann stärker die zugrundeliegende Sachstruktur, der Stoff oder stärker das Schülerverhalten berücksichtigt sein.

In diesem Sinne kann man bei der Aufgabenanalyse zwei unterschiedliche Ansätze unterscheiden:

- den „psychologischen" Ansatz, der stärker die Schülersicht
- und den „mathematisch-inhaltlichen" Ansatz, der stärker den mathematischen Inhalt berücksichtigt.

Beim „psychologischen" Ansatz ist zu beachten, dass die Gefahr bestehen kann, dass auf eine inhaltlich-mathematische Vorabklassifikation vollständig verzichtet wird. Einer von Wellenreuthers Kritikpunkten an der kognitiven Fehleranalyse und damit insbesondere am „psychologischen" Ansatz ist, dass das *„unterrichtliche Geschehen keinen systematischen Eingang in die Analyse findet* " (Wellenreuther 1986, S. 291).

Als Testverfahren bei quantitativen Untersuchungen im Rahmen des „psychologischen" Ansatzes werden häufig probabilistische Verfahren (wie z. B. das Rasch-Modell[66]) und bei qualitativen Untersuchungen interpretative Techniken im Rahmen von Einzelfallstudien (klinischen Untersuchungen) eingesetzt.

Bei dem „mathematischen-inhaltlichen" Ansatz wird die mathematische Struktur der zu untersuchenden Items zu Grunde gelegt und mit Hilfe von Experten eine in aller Regel hierarchische Klassifikation vorgenommen.

Als Beispiele hierfür können insbesondere die Untersuchungen von Gerster (1982) und Lörcher (1982, 1987) gelten, die das Verfahren der Konstruktion einer Diagnosematrix aus dem PUMP-Projekt von Kilborn und Johansson (1974) für Grundrechenarten gemeinsam weiterentwickelt haben.

Auf weitere Möglichkeiten zur Aufgabenkonstruktion wird im folgenden Teilkapitel genauer eingegangen.

Methode

Ein weiterer zu beachtender Gesichtspunkt bei der Fehleranalyse ist die verwendete Methode. Dabei geht es um das Beantworten der grundsätzlichen Frage bzgl. der Validität.

[66] Ein entscheidender Vorteil des Rasch-Modells ist es z. B, dass es gelingt, die Testaufgabenschwierigkeit bei der Auswertung zu berücksichtigen. Dagegen besteht bei klassischen Tests häufig das Problem, dass eine Testaufgabe dann schwierig ist, wenn sie von wenigen gelöst wird und deshalb von wenigen gelöst wird, weil sie schwierig ist - ein typischer Zirkel. Das Verfahren sowohl die Aufgaben als auch die Probanden in der gleichen Dimension anzuordnen, hat häufig zu Kritik geführt. So ist bei der Darstellung der Ergebnisse von TIMSS kritisiert wurden, dass die stoffliche Bewertung der Aufgaben in keinem Zusammenhang mit der raschskalierten Anordnung der Aufgaben nach der Schwierigkeit steht. Insbesondere die Vorveröffentlichung, die später revidiert wurde, mit der Zuordnung von Fähigkeitsniveaus für die verschiedenen Aufgaben und entsprechend für die Schülerinnen und Schüler war Anlass massiver Kritik.

Genügt eine Schülerin, ein Schüler als Repräsentant für die Gesamtheit oder benötigt man eine repräsentative Stichprobe, um Aussagen über Fehler und Fehlerursachen zu treffen? Was ist mit der Konsistenz, was ist mit der Reliabilität?

In diesem Sinne kann man die Untersuchungen in qualitative (Einzelfallstudien) und quantitative unterteilen.

Bei Einzelfallstudien wird davon ausgegangen, dass eine Schülerin, ein Schüler oder zumindest wenige Schülerinnen und Schüler repräsentative Ergebnisse für die Gesamtheit liefern.

Bei quantitativen Untersuchungen wird im Sinne des klassischen Vorgehens erwartet, dass nur größere Stichproben repräsentative Ergebnisse liefern.

Beide Vorgehensweisen sollten aber nicht als gegensätzlich oder konkurrierend verstanden werden. Beide haben in den verschiedenen Situationen ihre Berechtigung und können sich bei entsprechenden Fragestellungen sinnvoll ergänzen.

Produktionensysteme

Eine besondere Form der Fehleranalyse nutzt die Hilfe von Computern und Erkenntnissen der KI-Forschung. Hierbei spielt das sogenannte „Produktionensystem“ eine entscheidende Rolle. Ein Produktionensystem ist eine Menge von sogenannten Produktionenregeln. Eine Produktionenregel hat die Form einer „wenn - dann - Aussage". Im Sinne der ACT-Theorie (adaptive control of thought)[67] stellt jede einzelne Regel eine Fertigkeit dar. Diese Produktionen sind immer zielgerichtet. Aufgrund der Struktur solcher Produktionen wurden diese sowohl für die Entwicklung von tutoriellen Systemen (z. B. Beweisen in der Geometrie) verwendet, als auch bei der Diagnose von Fehlern mit dem Computer. Dabei wird davon ausgegangen, dass prozedurale Verfahren regelgeleitet erfolgen. Diese Regeln können richtig oder fehlerhaft sein. Die Diagnosesysteme BUGGY und DEBUGGY (siehe folgendes Teilkapitel) sind Beispiele hierfür.
In diesem Abschnitt wird eine deutschsprachige Fehleranalyse mit Einsatz von einem Produktionensystem vorgestellt, da hieraus zusätzliche Anforderungen an meine Untersuchung abzuleiten sind.

Hoppe (1987) nutzte im Rahmen seiner Dissertation die Konstruktion eines Produktionensystems von Lösungsregeln sowie vermuteten fehlerhaften Regeln aus und analysierte damit Lösungen und insbesondere Falschlösungen von Schülerinnen und Schülern bei Grundrechenaufgaben.

Für die zugrundeliegenden Fehlerklassifikationen gibt es nach Hoppe zwei unterschiedliche Vorgehensweisen:

---

[67] vgl. Anderson 1985, S. 456 und Anderson 1996. Die ACT-Theorie ist ein Versuch, die Hauptfaktoren, die Wissen beeinflussen, zu erkennen und in eine vollständige Kognitionstheorie, bestehend aus einer Menge von Annahmen über deklaratives Gedächtnis und prozedurales Gedächtnis, einzubringen. Anderson geht davon aus, dass nur prozedurale Aspekte der ACT-Theorie für das Erlernen von kognitiven Fertigkeiten relevant sind.

- Klassifikation der Fehler aufgrund von Abweichungen von einem „idealen“ Lösungsprozeß; damit wird es möglich, die Fehlerklassen durch „verletzte“ mathematischen Regeln und Operationen zu beschreiben. Hoppe spricht in diesem Fall von *phänomenologischer* Klassifikation.
- Klassifikation durch eine Modellierung von Fehlerstrategien[68]. Dies wäre eine *regelgeleitete* Klassifizierung.

Nach Hoppe (1987, S. 26) sind bei einer Fehleranalyse unter Einsatz von Produktionensystemen folgende Vorgehensweisen denkbar:

- Falls ein Modell der verschiedenen fehlerhaften Prozesse, die zu einem Fehler gehören, existiert, besteht die Fehlerdiagnose darin zu prüfen, welche Operationsfolge zu den gegebenen Schülerantworten führt. Dies ist der seltene Idealfall. Eine Fehlerkategorie ist dann durch die Äquivalenz der Operationsfolgen definiert.
- Gibt es ein idealtypisches Modell des Aufgabenlösungsprozesses, besteht die Fehlerdiagnose darin, diejenigen Regeln und Operationen anzugeben, die der Schüler beim Lösen der Aufgabe nicht beachtet oder falsch vollzogen hat. Die verletzte Regel oder die verletzten Regeln definieren dann eine Fehlerkategorie.

Bei der Entwicklung eines Fehlerkategoriesystems sollte dabei nach Hoppe (1987, S. 20) Folgendes beachtet werden.

(1) Der korrekte (ideale) Lösungsweg sollte expliziert werden.
(2) Die Fehlerdefinition sollte sich daran orientieren.
(3) Auf eine Grobklassifikation soll verzichtet werden. Fehlerkategorien werden erst nach der Feinanalyse theoretisch und empirisch zu Fehlertypen zusammengefaßt.

Für algorithmisch zu lösende Aufgaben unterscheidet Hoppe dabei folgende Ausgangspunkte für Fehlerbeschreibungen:

- Gruppierung der Schülerantworten, um regelhafte Falschantworten zu kategorisieren;
- Verfahrensfehler zur Kategorisierung der Abweichungen vom Normlösungsverfahren;
- Defizitfehler zur Kategorisierung von Abweichungen bezüglich eines postulierten Aufgabenlösungsprozesses;
- Modellierung des Fehlerentstehungsprozesses auf der Basis eines Aufgabenlösungsmodells unter Hinzunahme schülerspezifischer Regeln.

Hoppe (1987) führte in 39 bayrischen Hauptschulklassen der 5. Jahrgangsstufe einen fehlerdiagnostischen Test mit 29 Grundrechenaufgaben durch. Der Test wurde mit vierteljährlich Abstand dreimal durchgeführt.

[68] z. B. mit der *bug-repair-theory*

In der eigentlichen Auswertung wurden 22 Aufgaben in 6 Klassen mit 121 Schülern zu zwei Meßzeitpunkten betrachte und auf Klassenebene versucht, eine Fehlersystematik zu erkennen. Dabei zeigte sich, dass nach einem halben Jahr im Posttest noch systematische Fehler auftraten. Für die Fehleranalyse konstruierte Hoppe ein *Produktionensystem* aus Lösungsregeln und vermuteten fehlerhaften Regeln.

Die Fehler in den einzelnen Bereichen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) wurden in diesem Aufgabenlösungsmodell zu den Fehlertypen

- *Monitoringfehler* (Fehler bei Regeln, die die Zeilen- und Spaltensteuerung kontrollieren),
- *Prozeduralfehler* (Fehler bei Regeln, die die spezifischen Prozeduren wie Übertrag, Ergänzen usw. betreffen),
- *Elementarfehler* (elementarer Rechenfehler) und
- *Konzeptualfehler* (Fehler im Zusammenhang mit der Eins, mit der Null, bei zwei gleichen Ziffern)

zusammengefasst.

Dabei zeigte sich u. a., dass Prozeduralfehler nicht nur bei der „schwierigeren Aufgabenart" Division und Elementarfehler nur bei der Addition auftraten. Insbesondere der Monitoringfehler erwies sich im Nachtest als relativ stabil. Hoppe sieht diese Fehlerart als *„möglicherweise (...) instruktionsresistent* " an (Hoppe 1988, S. 124).

Zusammenfassung:
Ziel einer jeden Fehleranalyse ist es, die Entstehung und die Ursachen eines Fehlers zu erkennen und den zu einem Fehler führenden Prozess nachzuvollziehen, um dann entsprechende Gegenmaßnahmen einzuleiten. Durch die der Fehleranalyse zugrunde liegende Fehlerbeschreibung und Fehlerklassifikation wird eine Modellierung des Fehlerprozesses möglich. Die verschiedenen Fehleranalysen kann man auf drei Ebenen unterscheiden: aufgrund der Fehlerbeschreibung, aufgrund der Aufgabenbeschreibung und aufgrund des verwendeten Verfahrens bzw. aufgrund der verwendeten Methode. Die Fehlerbeschreibung kann inhaltlich-mathematisch erfolgen oder mit kognitiven Theorien und Modellen (aus Schülersicht). Die Aufgaben können aufgrund der mathematischen Sachstruktur oder aufgrund des Schülerverhaltens klassifiziert werden. Bei Untersuchungen zu Fehleranalysen unterscheidet man qualitative und quantitative Studien. Je nach Fragestellung und Untersuchungsgegenstand ist das eine oder andere Verfahren angemessen. Keine Vorgehensweise ist der anderen von Vorneherein überlegen.

3.2. Aufgabenkonstruktion

Für die Aufgabenkonstruktion gibt es, wie bereits oben dargestellt, verschiedene Möglichkeiten. Zusätzlich zu der Vorgehensweise bei Produktionensystemen sollen zwei weitere Ansätze exemplarisch vorgestellt werden: die Konstruktion einer Diagnosematrix und eine Arbeit von Ekenstam/Nilsson. Das Beispiel zur Diagnosematrix von Lörcher und die Arbeit von Ekenstam/Nilsson spielen zusätzlich eine entscheidende Rolle für meine Untersuchung.

Konstruktion einer Diagnosematrix

Die Idee entstand im Rahmen des PUMP-Projektes von Kilborn und Johansson (1974) in Schweden und wurde im deutschsprachigen Raum von Gerster (1982) und Lörcher (1982, 1987) etabliert und von Roser (1991) zur Untersuchung beim Gleichungslösen verwandt.

Dieses Vorgehen soll anhand der Untersuchung von Lörcher (1987) exemplarisch dargestellt werden.
Zuerst werden die relevantesten Schwierigkeitsfaktoren für eine Klasse von Aufgaben zusammengestellt. Hierfür werden bereits vorhandene Untersuchungsergebnisse ausgenutzt oder mit Hilfe von stofflichen Analysen entwikkelt. Dabei werden die Schwierigkeitsfaktoren in zwei Hauptdimensionen eingeteilt.

Bei Lörchers Diagnosematrix zu Termumformungen waren die wichtigsten Schwierigkeitsfaktoren der Zahlenraum und die Komplexität des Terms.

Zu den Kombinationen dieser Schwierigkeitsfaktoren in den zwei Hauptdimensionen werden dann in einer Matrix Aufgaben konstruiert.

Schwierigkeits-faktoren	IN mit Koeffizienten	IN z.t. ohne Koeffizienten	Z mit Koeffizienten	Z z.t. ohne Koeffizienten
Normalfall	*5a+2a* *6ab-4ab*	*4a-a* *ab+8ab*	*-5a-2a* *-6ab-4ab*	*-4a+a* *-ab-8ab*
Null im Ergebnis	*1b-b1* *bc1-1bc*	*b-1b* *1bc-bc*	*-1b+b1* *-bc1+1bc*	*-b+1b* *-1bc+bc*
Null als Faktor	*0c+9c* *7cd-0*	*c-0* *0cd+cd*	*-0c-9c* *-7cd+0*	*-c+0* *-0cd-cd*
verschiedenartige Terme	*3e-8+2e* *4f+2e-3f*	*5-e-1* *6e+5f+e*	*-3e+8+2e* *-4f-2e+3f*	*-5+e+1* *-6e-5f-e*
verschiedene Reihenfolge	*5x+x3* *xy6-2yx*	*x5-x* *yx+xy*	*-5x-x3* *-xy6+2yx*	*-x5+x* *-yx-xy*
Klammern	*8y+(2y+4y)* *(6yz-4yz)+3yz*	*(5y-3y)-y* *9yz-(yz+3yz)*	*-8y-(2y+4y)* *(6yz-4yz)-3yz*	*-(5y-3y)+y* *-9yz+(yz+3yz)*

Abbildung 33: Diagnosematrix Lörcher 1987, S. 72

Lörcher verzichtete bei seinem diagnostischen Test zu Termumformungen auf Koeffizienten aus den Bruchzahlen, Kommazahlen und großen Zahlen, da er davon ausging, dass die damit verknüpften arithmetischen Schwierigkeiten die algebraischen überlagern und eine Diagnose damit behindern.

Die durch negative Zahlen verursachten Probleme waren groß. Eine Erklärung hierfür könnte sein, dass durch das dichte Aufeinanderfolgen der beiden im 7. Schuljahr neu eingeführten Stoffgebiete die Gefahr verstärkt wird, dass Schülerinnen und Schüler an der Algebra scheitern, weil sie das vorhergehende Gebiet des Rechnens mit negativen Zahlen nicht beherrschen.

Lörcher vermutet, dass sich diese Probleme noch verstärken, wenn wie beim Lösen von Gleichungen zur Addition und Subtraktion auch noch die Multiplikation und Division mit negativen Zahlen in der Algebra kommt. Die durch Klammern verursachten immensen Schwierigkeiten machen deutlich, dass dem Umgang mit diesen Symbolen in Algebra mehr Aufmerksamkeit gewidmet werden sollte.

Ferner ist die Null ein besonderer Schwierigkeitsfaktor, der die Schülerinnen und Schüler durch die ganze Schulzeit zu begleiten scheint[69].

Lörchers Untersuchung zeigt, „*daß es gelingen kann, durch sorgfältige Kontrolle der Schwierigkeitsmerkmale einer Aufgabe die für den Schüler wirksam werdenden Schwierigkeiten effektiv voneinander zu isolieren. Die Konstruktion der Aufgaben mit Hilfe einer Diagnosematrix hat sich dabei als brauchbares, weil für den Lehrer handhabbares Hilfsmittel erwiesen*.“ (Lörcher 1987, S. 78f.).

Aufgabenkonstruktion nach Ekenstam/Nilsson

Ausgehend von der Problemstellung „Löse die Gleichung $\frac{3x-2}{2} = \frac{x}{3}$“ betrachteten die Ekenstam/Nilsson die verschiedenen Lösungsschritte:

$$\begin{aligned} 3(3x - 2) &= 2x \\ 9x - 6 &= 2x \\ 7x - 6 &= 0 \\ 7x &= 6 \end{aligned}$$

und untersuchten die folgenden Fragestellungen:

- Wieviele Schülerinnen und Schüler schaffen den letzten Schritt und keine weiteren?
- Ist der Lösungserfolg größer, wenn statt 7x = 6 die Gleichung 7x = 14 lautet?
- Wird das Problem schwieriger, wenn statt x als Variable zum Beispiel t verwendet wird?

Die verschiedenen Testaufgaben wurden sogenannten Top-Items zugeordnet. Damit gab es insgesamt 10 Itemgruppen mit insgesamt 130 Einzelitems. Diese Einzelitems wurden dann auf verschiedene Subtests verteilt.

Es wurde sichergestellt, dass keine Schülerin, kein Schüler den sequentiellen Zusammenhang der Aufgaben erkennen konnte. Durchschnittlich wurde jede Einzelaufgabe von 200 Schülerinnen und Schülern bearbeitet.

[69] siehe Fehler im Zusammenhang mit der Null beim Bruchrechnen (Lörcher 1982)

Für den Bereich des Gleichungslösens ergaben sich folgende Ergebnisse für folgende Itemgruppen.

Test item	A %	S %	Content
(1) $\frac{3x-2}{2} = \frac{x}{3}$	28	36	
(2) $3(3x-2) = 2x$	70	71	The first step performed
(3) $9x-6 = 2x$	74	79	The second one performed
(4) $9R-6 = 2R$	64	68	As (3) but x is changed to R
(5) $7x-6 = 0$	71	78	A possible step after (3)
(6) $7t-6 = 0$	72	78	As (5) but x is changed to t
(7) $7x = 6$	77	82	Final step
(8) $243x = 242$	69	69	As (7) but the coefficients are changed

Abbildung 34: Ekenstam/Nilsson 1979, 2. 47 Gleichungen (1)[70]

Test item	A	S	Content
(1) $\frac{10}{9x} + \frac{1}{6} = 1$	24	27	
(2) $\frac{10}{9x} = \frac{5}{6}$	38	41	The first step is taken
(3) $\frac{5}{6} = \frac{10}{9x}$	41	52	As (2) but the equation is reversed
(4) $\frac{9x}{10} = \frac{6}{5}$	59	67	As (2) but inverted
(5) $\frac{2}{x} = \frac{3}{2}$	38	45	The same idea as in (2) but the coefficient of x is 1
(6) $\frac{x}{6} = \frac{2}{9}$	59	66	As (5) but x in the numerator
(7) $\frac{4}{x} = 3$	48	50	As (6) but the right-hand side is a natural number
(8) $3x = 4$	79	79	Final step of each equation
(9) $4 = 3x$	70	74	As (8) but the equation is reversed

Abbildung 35: Ekenstam/Nilsson 1979, S. 47 Gleichungen (2)

Unter anderem zeigte sich, dass der Lösungserfolg deutlich geringer war,

- wenn x im Nenner stand,
- wenn die seitenverkehrte Aufgabe gelöst werden sollte, also x auf der rechten statt auf der linken Seite stand[71]
- wenn die Lösung keine natürliche Zahl war.

[70] Die Spalte für A zeigt den prozentualen Lösungserfolg für alle Schülerinnen und Schüler, die Spalte für S den prozentualen Lösungserfolg für die Schülerinnen und Schüler, die in speziellen naturwissenschaftlichen oder technischen Klassen sind.
[71] Bei Aufgaben, bei denen x im Nenner stand, war es allerdings umgekehrt (siehe (2) und (3) in Gleichungen (2)).

Bei der speziellen Auswertung und dem Vergleich der Lösungserfolge zusätzlicher Gleichungen zeigte sich als ein überraschendes Ergebnis, dass $\frac{4}{x} = 3$ mit 48% Lösungsquote deutlich schlechter gelöst wurde als $\frac{14}{x+2} = 2$ mit 58% Lösungsquote. Dies interpretieren die Autoren ebenfalls mit dem Einfluss der Lösung auf den Lösungserfolg.

Bei der Verwendung von Produktionensystemen für tutorielle Systeme entsteht eine ähnliche Struktur, die von leichteren Aufgaben auf komplexere Aufgaben rückschließen lässt. Diese Struktur impliziert, dass, wenn bestimmte (leichte) Aufgaben gelöst werden, die darüber befindliche komplexere Aufgabe ebenfalls gelöst werden müßte.

Die Vorgehensweise von Ekenstam/Nilsson berücksichtigt eine Analyse der Lösungsschritte und impliziert, da in jedem Schritt Fehler möglich sind, dass der letzte Lösungsschritt als Aufgabe leichter ist als die gesamte Aufgabe.

Solche hierarchische Strukturen, entstanden aus Expertenbefragungen oder aus logischen, inhaltlichen Implikationen wie beim Produktionensystem, erinnern an die bekannte Idee des „Mastery Learning“.

Die Aufgabenkonstruktion mit einer Diagnosematrix stellt immer zwei Hauptschwierigkeitsdimensionen gegenüber und kombiniert diese. Da aber noch weitere Schwierigkeitsdimensionen existieren können, ist die für die Aufgaben verknüpfte Struktur deutlich komplexer, als in den anderen Fällen.

Zusammenfassung:
Die Aufgabenkonstruktion aus mathematisch-inhaltlicher Sicht nutzt üblicherweise Expertenwissen. Dabei werden in aller Regel hierarchische Strukturen verwendet. Die Verwendung einer Diagnosematrix stellt zwei Schwierigskeitsdimensionen gegenüber und erlaubt damit eine nichtlineare Klassifikation. Für meine Untersuchung ist dies anzustreben. Dies verlangt, dass solche Schwierigkeitsdimensionen im Vorhinein bekannt sind.

3.3. Kognitionstheoretische Modelle

Seit Ende der siebziger Jahre gibt es eine ganze Reihe von Veröffentlichungen zum Modellieren von Lehr- und Lernprozessen und den damit verknüpften Lernschwierigkeiten und Fehleranalysen. Mit Hilfe von kognitionstheoretischen Modellen und empirischen, zumeist qualitativen Untersuchungen auf der einen Seite und inhaltlich-mathematischen Überlegungen auf der anderen Seite wurde versucht, in verschiedenen schulmathematischen Bereichen eine Beschreibung in Form solcher Modelle vorzunehmen. Außerdem wurde mit Hilfe des Einsatzes von Computern versucht, den Fehlerprozess zu simulieren und zu diagnostizieren. Für eine gute Übersicht über die verschiedenen kognitionstheoretischen Modelle und insbesondere für die wesentlichen kognitionstheoretischen Begriffe Schema und Prozedur siehe Hasemann (1988). Wegweisend waren hier insbesondere die Arbeiten von Davis/McKnight (1979), Davis (1982) und Brown/VanLehn (1980) und im Bereich der Algebra von Matz (1982). Im deutschsprachigen Raum entwickelten insbesondere Tietze (1988) und Malle (1993) aufgrund dieser Vorarbeiten eigene Modelle für den Bereich der Schulalgebra. Diese Theorien und Modelle sollen kurz skizziert werden, da sie für die Forschung eine zentrale Rolle eingenommen haben. Auf eine genauere Erläuterung wird hier verzichtet.

Davis/McKnight (1979) unterscheiden in ihrem „*Modell der kognitiven Prozesse*" *sequentiell ablaufende Prozesse, „ganzheitliche" Prozesse* und sogenannte *„deeper-level-rules".*

Bei den sequentiell ablaufenden Prozessen handelt es sich um:
- Prozeduren (algorithmisch ablaufend),
- Prozeduren, die von Zwischenergebnis zu Zwischenergebnis durchlaufen werden („visually-moderated-sequences"),
- globaler Überblick („integrated sequences").

Zu den sequentiell ablaufenden Prozessen gehören Fähigkeiten:
- visually-moderated-sequences zu integrieren (Ähnlichkeiten zwischen zwei Teilen von Prozeduren festzustellen, vorauszudenken, vorauszusehen),
- einen Ablauf - insbesondere die gerade ablaufende Prozedur - im Gedächtnis zu behalten.

Bei den „ganzheitlichen" Prozesse handelt es sich um:
- Frames, scripts oder Schemata
- Metasprache (die Aufruf, Unterscheiden und Aneinanderreihung von Schemata erlaubt)

Dazu gehören Mechanismen:
- um die Eingangswerte („slots") von Frames zu besetzen,
- um ein Frame aufzurufen,
- um zu entscheiden, dass das richtige Frame aufgerufen wurde („Passung"),
- um Frames zu erzeugen.

Deeper-level-rules sind Regeln, die weitere Regeln erzeugen.

Dieses Modell[72] wurde im Rahmen des Madison-Projektes an der University of Illinois entwickelt.

Die Abgrenzung von Frames, Prozeduren und deeper-level-rules war in diesem Modell sicherlich noch ungenau.

Im deutschsprachigen Raum nutzte Hasemann (1985) dieses Beschreibung, um die individuellen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler im Zusammenhang mit der Addition von Bruchzahlen zu beschreiben.

Die Arbeitsgruppe um Brown/Burton[73] vom Xerox Palo Alto Research Center hat Ende der siebziger Jahre unter Einsatz eines Großrechners versucht, die

[72] Aufgrund der postulierten Mechanismen ist dieses Modell in der Literatur auch unter dem Namen „hypothetische Mechanismen" bekannt.

individuellen Prozesse von Schülerinnen und Schülern beim schriftlichen Subtrahieren zu beschreiben. Dazu entwickelten sie das „Buggy Modell“ und simulierten diese Prozesse. Mit dem Diagnostiksystem DEBUGGY und der weiterentwickelten interaktiven Version IDEBUGGY, die 110 einfache Fehlerprozeduren (*primitive bugs*) und 20 zusammengesetzten Bugs implementiert hatte, gelang es, für ca. 40 Prozent der Bearbeiter passende Modelle für den Fehlerprozess anzugeben.

Brown/VanLehn entwickelten aufgrund der Arbeit mit BUGGY und DEBUGGY die „*bug-repair-theory*". Dabei gingen sie davon aus, dass Fehler beim algorithmischen Lösen von Aufgaben durch Reparaturen von Lücken in diesen Algorithmen verursacht werden.[74] Die zentrale Idee war, dass Schülerinnen und Schüler Reparaturstrategien einsetzen, wenn sie an eine Lücke in ihrem Algorithmus stoßen.

Die Erklärung von Fehlern mit Hilfe der bug-repair-theory reichte allerdings nicht aus[75]. Problematisch war, dass diese Fehlerstrategien im allgemeinen nicht konsistent und systematisch durchgehalten wurden und dass fehlerhafte Lösungsalgorithmen bei mißglückter Anwendung geändert wurden, wodurch wechselnde Hilfsstrategien entstehen konnten („*bug migration"*). Dadurch wurde eine eindeutige Diagnose erschwert und der Versuch mit Hilfe von individuell zugeschnittenen Lernsequenzen zur Therapie dieser bugs blieb praktisch erfolglos[76].
Davis (1982, S. 74f.) nimmt Bezug auf VanLehn und beschreibt ein detaillierteres Fehlermodell zum schriftlichen Subtrahieren. Dabei unterscheidet er folgende Fehlerkategorien:

- consistent errors based upon a defective algorithm (bugs)
- consistent errors based on an incorrect interpretation of some natural language statement ("zero means nothing", "adding zero doesn't change it")
- consistent errors based upon fallacious epistemological assumptions
- performance errors (slips)
- errors due to the retrieval of incorrect "frames" or procedures
- errors that involve the retrieval of a defective or incomplete frame or procedure;

[73] vgl. Burton / Brown 1978, Brown/vanLehn 1980
[74] vgl. Burton / Brown 1978, Brown/vanLehn 1980, vanLehn 1982
[75] vgl. VanLehn 1990
[76] Anmerkung: VanLehn (1990) baute seine Untersuchung im Zusammenhang mit der *bug-repair-theory* in eine Lerntheorie aus, die erklären soll, wie Schülerinnen und Schüler prozedurale Fehlvorstellungen entwickeln, die systematische Fehler verursachen. Er verweist darauf, dass üblicherweise angenommen wurde, dass Wissen zum Lösen von arithmetischen Problemen der Art 837 – 129 extrem leicht anzueignen und zu benutzen ist; solch ein Wissen wird als *mentales Programm* gesehen, dessen syntaktische Form die Anwendung bestimmt. Solche mentalen Programme werden gelernt durch Speichern und Üben. Schülerinnen und Schüler kennen häufig das Programm, können den Algorithmus also ausführen, aber wissen nicht warum, zu welchem Zweck und auf welche Weise dieses Programm funktioniert. Dies führt dann zu entsprechenden Problemen

– errors that involve a failure to retrieve a correct procedure despite the fact that such a procedure was well-known to the student.

Diese Fehlermodell (formuliert für das schriftliche Subtrahieren) wurde im Folgenden in analogen Situationen, bei denen es um algorithmisches Lösen ging, entsprechend adaptiert.

Kennzeichnend für diese Modelle war, dass sie zusätzlich zu der mathematischen Sichtweise, Modellierungen aus der Kognitionswissenschaft und der Künstlichen-Intelligenz-Forschung verwendeten. Bei der Entwicklung dieser Modelle ist deutlich ein Bruch mit dem klassischen Vorgehen zu erkennen. Statt, wie bislang üblich, im Vorfeld Hypothesen zu erstellen und diese anhand von Tests aufgrund vorgegebener Signifikanzniveaus zu überprüfen oder zu verwerfen, wurde hier anhand von Untersuchungen versucht, Modelle zu entwickeln, um das Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler zu erklären. Problematisch ist und bleibt natürlich, inwieweit solche Modelle bzw. Theorien in andere mathematische Teilgebiete übertragbar sind und inwieweit diese Theorien tatsächlich tragfähig sind[77].
Der entscheidene Fortschritt dieser Vorgehensweise war allerdings, dass es hiermit erstmals gelang, eine Modellierung aus Schülersicht durchzuführen und den Lösungsprozess und nicht nur das Produkt in den Vordergrund der Betrachtung zu rücken.

Eine wegweisende Arbeit zu Lehr- und Lernschwierigkeiten im Bereich der Schulalgebra ist die von Matz (1980 und 1982). Sie geht aufgrund ihrer Untersuchungen davon aus, dass Schülerfehler das Ergebnis von begründbaren, aber nicht erfolgreichen Versuchen sind, vorher angeeignetes Wissen auf eine neue Situation zu übertragen.

Aufgrund dieser Annahme beschreibt sie das Lösungsverhalten von Schülerinnen und Schülern als einen Prozeß der zwei Komponenten enthält:

- das Verwenden von Basisregeln und
- das Anwenden von Extrapolationstechniken.

Die Basisregeln umfassen das vermutete Wissen, das einem neuem Problem vorangeht, in Form einer Regel, abgeleitet aus prototypischen Aufgaben oder direkt aus dem Schulbuch übernommen. Extrapolationstechniken sind Verfahren, die dazu geeignet sind, eine Verbindung zwischen bekannten Regeln und unbekannten Problemen herzustellen. Dabei unterscheidet sie zwei grundsätzliche Möglichkeiten: ein unbekanntes Problem als ein Bekanntes zu sehen oder eine bekannte Regel so zu ändern, dass sie in der neuen Situation anwendbar ist.

Matz (1982, S.27) beschreibt, dass eine Vielzahl von Fehlern in diesem Sinne als falsche Auswahl von Extrapolationstechniken interpretiert werden können.

[77] vgl. hierzu Führer 1997, S. 134

Dabei unterscheidet sie drei Kategorien von Fehlern:

(1) errors generated by an incorrect choice of an extrapolation technique[78]
(2) errors reflecting an impoverished (but correct) base knowledge
(3) errors arising during the execution of a procedure.

Solche Fehler nennt Matz konzeptionelle Fehler. Zusätzlich dazu gibt es Prozessfehler bzw. Ausführungsfehler. Diese Abgrenzung ist sicherlich nicht eindeutig. Damit soll aber eine Unterscheidung von Flüchtigkeitsfehlern und „echten Mißverständnisfehlern" versucht werden.

Matz‘ Modell unterscheidet sich von den bisher dargestellten Modellen dadurch, dass die Beschreibung explizit auf die Situaton in der Algebra zugeschnitten ist.

Aufgrund der obigen Modellierungen entwickelten im deutschsprachigen Raum Tietze (1988) und Malle (1993) eigene Modelle zum Gleichungslösen (Tietze) und zu algebraischen Umformungen (Malle).

Tietze (1988) verwendete zusätzlich zu den oben genannten Modellen noch eine Modellierung von Shevarev (1975 amerikanische Übersetzung). Fehler entstehen nach Shevarev, wenn Schülerinnen und Schüler

- die notwendigen Regeln nicht oder nicht genau kennen,
- zwar die Regeln kennen, aber sie nicht anwenden können oder
- die Regeln anwenden können, aber im Widerspruch zu ihnen handeln.

Shevarev untersuchte die dritte Fehlerart und entwickelte hierfür ein Modell. Er ging davon aus, dass Schülerinnen und Schüler, obwohl sie beim Aufgabenlösen nach Regeln handeln, sich dieser nicht bewusst sind. Beim Aufgabenlösen wird eine Verbindung („connection“) aktiviert, deren zwei Komponenten die Wahrnehmung von äusseren Merkmalen und die Tendenz zur Ausführung von inneren Operationen sind. Tietze (1988) spricht hier von „Etiketten“. Solche Etiketten dienen dazu, bestimmte Schemata aufzurufen und dazu gehörende Prozeduren auszulösen. Dies ist aber kein Automatismus. Die Etiketten besitzen lediglich eine entsprechende Tendenz für bestimmte Schemata und Prozeduren.

Zur Beschreibung und Erklärung von Fehlern und Lernschwierigkeiten unterscheidet Tietze:

– Fehlermuster, die eine deskriptive Typologie nach inhaltlich-mathematischen Fehlerklassen ermöglichen,
– individuelle, subjektive Fehlerprozesse, die einem Fehler zugrunde liegen,
– Ursachen „primärer Art"[79].

[78] Typische Extrapolationstechniken sind Linearisieren als Übergeneralisierungen des Distributivgesetzes, z. B.: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ und Verallgemeinern, z. B.: Aus „Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist“, wird $(x – 5) (x – 7) = 3$ ergibt $(x – 5) = 3$ oder $(x – 7) = 3$.

Tietze sieht im Übergang von der Arithmetik zur *Algebra „einen Erwerb gänzlich neuartiger Konzepte*" (1988, S. 163) und, damit verknüpft, drei neuartige Schemata, nämlich für Vorstellungen, die mit dem Gleichheitszeichen verknüpft sind, für Klammern, die die Abfolge von Operationen festlegen und für Vorstellungen im Zusammenhang mit der Verwendung von Buchstaben.
In der folgenden schematischen Übersicht stellt Tietze (1988, S. 179) ein Beschreibungsmodell für das Lösen von Gleichungen auf:

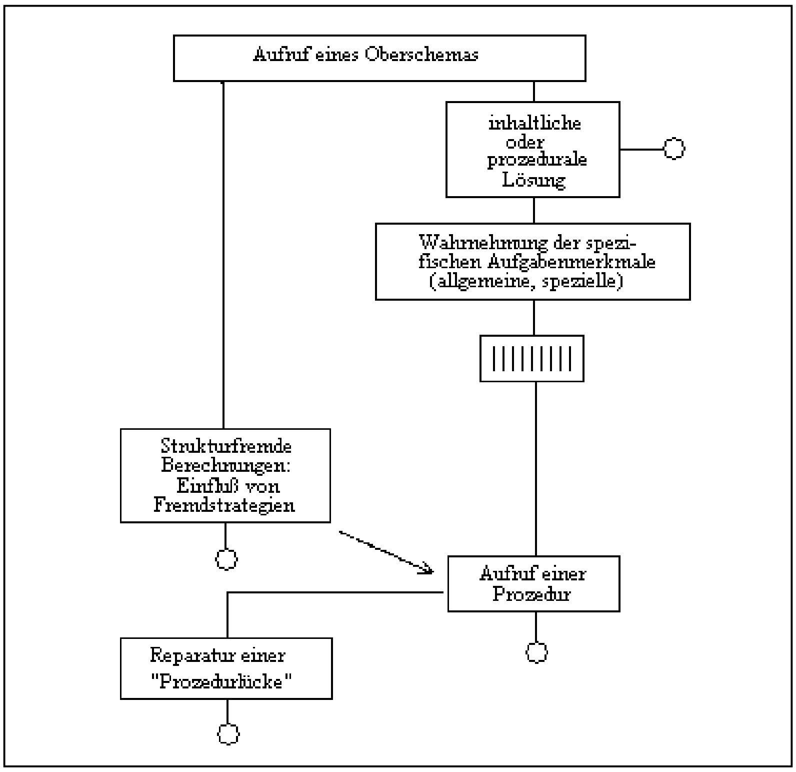


Abbildung 36: Beschreibungsmodell zum Lösen von Gleichungen
Tietze 1988, S. 179

Dabei geht er davon aus, dass neben dem strukturbezogenem Prozess ein konkurrierender Prozess zum Reduzieren von Schwierigkeiten abläuft. Dieser Prozess wird durch Fremdstrategien gesteuert. Bei der unvollständigen Wahrnehmung der speziellen Merkmale einer Aufgabe spielen nach Tietze übergeneralisierte Prozeduren und Schemata eine zentrale Rolle.

Malle (1993) bezieht sich auf die oben genannten Arbeiten von Davis/McKnight (1979), Davis (1982), Matz (1980), Shevarev (1946) und Tietze (1988) und fasst Fehler bei der Informationsaufnahme und Informationsverarbeitung (z. B. unvollständige Informationsaufnahme und unzulässiges Strukturieren von

[79] Schwächen kognitiver Stützfunktionen und psychisch-emotionale Überlagerungen, vgl. Tietze 1988, S.167ff.

Termen) und folgende Fehler beim Aufruf, bei der Verarbeitung und der Anwendung von Schemata[80] wie folgt zusammen:

- Übergeneralisieren,
- unzulässiges Linearisieren,
- Verwendung inadäquater Schemata,
- Bildung unpassender Bedarfsschemata durch Metasprache,
- Rückgriff auf allgemeine Lebensweisheiten,
- Verwendung zu offener Schemata,
- Verwendung unpassender Ersatzschemata,
- Interferenz von Schemata,
- Nichtbeachtung von Prozedurhierarchien und
- Ausführungsstörungen.

Malle stellt sein Schemamodell auf folgende Art da:

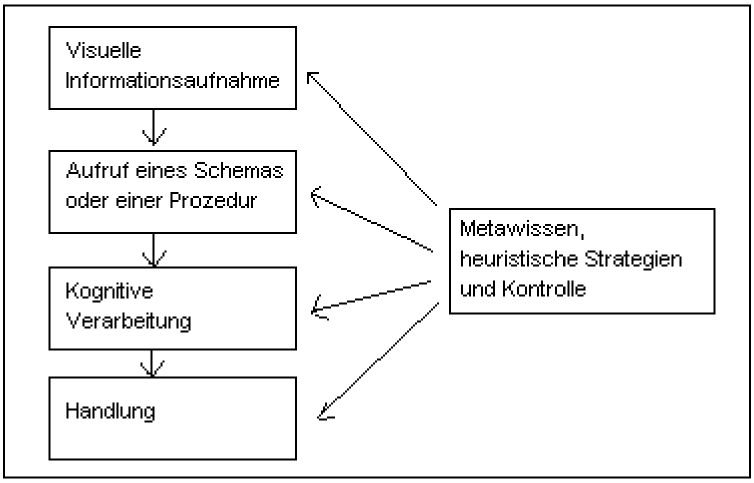


Abbildung 37: Schemamodell für algebraische Umformungen
Malle 1993, S. 163

Zusammenfassung:
Kognitionstheoretische Modellierungen beschäftigen sich u. a. mit der Art der Wissensrepräsentation beim Menschen und mit den Mechanismen bei der Wissensanwendung. Insbesondere diese Mechanismen sind seit Ende der siebziger Jahre mit Hilfe von Computern („künstlicher Intelligenz") simuliert worden. Die Art der Beschreibung der Prozesse sowohl beim Wissenserwerb als auch bei der Wissensanwendung beim Menschen erfolgte in Analogie zur Informatik. Daraus resultierte ein Abwendung von lerntheoretischen Modellierungen wie z. B. bei Bruner und entwicklungspsychologischen Modellierungen wie von Piaget. Für die Mathematikdidaktiker, die sich mit solchen Fragestellungen beschäftigen, wurde die Kognitionspsychologie zur entscheidenden Bezugswissenschaft[81]. Im Bereich der Schulmathematik waren die Arbeiten von Davis/McKnight (1979), Davis (1982) und Brown/VanLehn (1980) wegweisend. Für den Bereich der Algebra wurden von Matz (1982) und Tietze (1988) eigenständige Modelle entwickelt.

[80] vgl. Malle, S 163ff.
[81] Inwieweit in Zukunft Erkenntnisse der Gehirnforschung Einfluss auf die Mathematikdidaktik haben werden, ist zur Zeit nicht absehbar. Insbesondere das Buch von Dehaene (1997): „The Number Sense – How the Mind Creates Mathematics" zeigt beachtenswerte Möglichkeiten auf.

3.4. Lehr- und Lernschwierigkeiten in der Schulalgebra

In diesem Teilkapitel wird auf curriculare Abläufe Bezug genommen und die von verschiedenen Autoren als problembehaftet beschriebenen Bereiche werden zusammengestellt. Dies ist auch abhängig von der Sichtweise, was Bestandteil der eigentlichen Schulalgebra ist und welche Fertigkeiten z. B. dabei von den Schülerinnen und Schülern erworben werden sollen.

Die in der Algebra zu erarbeitenden Fertigkeiten können je nach Sichtweise auf folgende Art unterschieden werden:

- Algebra als verallgemeinerte Arithmetik[82]: Dann sind algebraische Fertigkeiten Übersetzungen und Verallgemeinerungen der bekannten Beziehungen zwischen Zahlen.
- Algebra als Bereich zur Untersuchung von Prozeduren zur Problemlösung: Dann sind algebraische Fertigkeiten Tätigkeiten wie Vereinfachen und Lösen.
- Algebra als Bereich zur Untersuchung von Größen und ihren Beziehungen: Dann werden Graphen z. B. zur Darstellung dieser Beziehungen genutzt und Variablen sind tatsächlich variabel. Fertigkeiten sind hier der Umgang mit Symbolen und Schaubildern.
- Algebra als Bereich zur Untersuchung von Strukturen wie Gruppe, Ring, Integritätsbereich usw.[83]: Damit sind Variablen mathematische Objekte, die in entsprechenden Strukturen bestimmte Eigenschaften besitzen. Fertigkeiten sind dann die Eigenschaften Nachweisen, Deduzieren und Beweisen.

Im Sinne von Vollrath (1994) sind alle diese Sichtweisen für die Schulalgebra wichtig. Bei den meisten Autoren ist aber zumindest die letzte Sichtweise nicht relevant für die Schulalgebra.

Da der Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler immer auch mit dem Beherrschen der jeweiligen Fertigkeiten verknüpft ist, ergibt sich auch bei den verschiedenen Autoren bei der Beschreibung von Lernschwierigkeiten eine unterschiedliche Bewertung und Gewichtung.

Ich möchte mich im Weiteren auf die ersten beiden Sichtweisen konzentrieren und den Bereich der Funktionen wie bisher nicht betrachten.

Da Lehr- und Lernschwierigkeiten im Schulunterricht immer auch mit dem curricularen Ablauf verknüpft sind, soll auf die typische Reihenfolge im Bereich der Algebra eingangen werden[84].

Kieran[85] beschreibt, dass üblicherweise im Mathematikunterricht der Bereich der Algebra mit der Einführung des Variablenkonzepts beginnt. Die typische Reihenfolge bis zur Behandlung der Gleichungslehre lautet:

---

[82] siehe z. B. Usiskin 1988
[83] Diese Betrachtung wurde bei der Reform betont, ist aber mittlerweile stark im Rückgang. Vgl. hierzu auch die entsprechenden Auszüge aus den Schulbüchern.
[84] vgl. hierzu auch die Lehrpläne in Niedersachsen, die für meine Untersuchung relevant sind, und die Lehrpläne der verschiedenen Bundesländer im Anhang.

- Variablen,
- Vereinfachung von algebraischen Ausdrücken,
- Gleichungen in einer Variablen,
- Gleichungslösen.

Nach Kieran hat sich gezeigt, dass in diesen Bereichen Schülerfehler oft verbunden sind mit:

- der Bedeutung von Buchstaben,
- dem Wechsel der Konventionen, die bislang in der Arithmetik galten und
- dem Wiedererkennen und der Verwendung von Strukturen[86].

Bedeutung der Buchstaben

Insbesondere der Variablenbegriff und die verschiedenen Konzepte von Variablen bei Schülerinnen und Schülern sind, wie bereits geschildert, Gegenstand von einer Vielzahl von Untersuchungen gewesen. „*One subtle and complicating feature about the abstract character of symbolic values is that the precise nature of the abstraction varies.* (. . .) *Activities such as simplifying expressions, solving equations and pattern-matching treat these varieties of variables in subtle different ways*." (Matz 1982, S. 38).

Bereits 1923 erkannte Thorndike, dass verschiedene Buchstaben für verschiedene Interpretationen von Variablen bei Schülerinnen und Schülern reserviert sind, es damit einen Unterschied ausmacht, ob die Variable mit x oder mit t bezeichnet wird.

Küchemann[87] klassifizierte im Rahmen von CSMS bei ca. 1000 Schülerinnen und Schülern im Alter von 13 bis 15 Jahren mit einem Test bestehend aus 51 Items sechs Stufen der Interpretation von Buchstaben.

In der Folgestudie „*Strategies and Errors in Secondary Mathematics*“ von 1980 bis 1983 (SESM) wurde mit Hilfe von Interviews bei 50 Schülerinnen und Schülern und Unterrichtsexperimenten in Kleingruppen und im Klassenverband untersucht, inwieweit die Schwierigkeit von Schülerinnen und Schülern, Buchstaben als verallgemeinerte Zahlen zu interpretieren, mit „kognitiver Bereitschaft" in Zusammenhang stehen.

Es zeigte sich, dass die Schülerinnen und Schüler mit der niedrigsten Fähigkeit während des Unterrichtsexperimentes dazu nicht in der Lage waren, während die Schülerinnen und Schüler mit mittlerer und hoher Fähigkeit dies schafften.

[85] Kieran 1989, S. 40f.
[86] Kieran unterscheidet für Gleichungen zwei Strukturen: eine „Oberflächen-“ Struktur („surface structure“) und eine „systemische“ Struktur („systemic structure“); s. hierzu Kieran 1989, S. 40ff.
[87] Küchemann 1981, siehe hierzu auch den Abschnitt zu Variablen und deren Aspekte

Ein weiteres Ergebnis war, dass Unterricht bei Schülerinnen und Schüler, die Probleme mit nichtnumerischen Ergebnissen[88] wie „x + 3“ hatten, dazu führte, dass diese ihre Sichtweise ändern konnten[89].

Wechsel der Konventionen beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra

Malle (1993, S. 135 ff.) sieht beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra besonders die auftretenden Bedeutungsveränderungen als wesentlich, aber damit auch als besonders problembehaftet an:

- die Veränderung der Operationszeichenbedeutung,
- die Veränderung der Konkatenationsbedeutung,
- die Bedeutungsveränderung des Gleichheitszeichens vom Zuweisungs- oder Handlungszeichen („Ergibtzeichen") zum Vergleichs- oder Beziehungszeichen.

Obwohl in der Algebra die gleichen Operationszeichen wie in der Arithmetik benutzt werden, sind die Rechenoperationen üblicherweise nicht wie bisher Ausführungsbestimmungen, sondern sie geben nur an, wie zu rechnen wäre, wenn man die Zahlen kennen würde.

Hieraus entstehen für Schülerinnen und Schüler oft große Schwierigkeiten.

In der Arithmetik bedeutete "+", dass man eine Rechnung ausführen musste, jetzt bedeutet "+" z.B. bei $a + b$, dass man nichts mehr machen darf. „*Arithmetik und Algebra verhalten sich ähnlich wie Gebäude und Bauplan. Algebra ist also eine Kurzschrift, um Rechnungen zu planen. Arithmetik ist die Ausführung dieser Planungen, wobei man nach Ausführung der Operationen aus dem Ergebnis nicht mehr zurückschließen kann, welche Rechnung ausgeführt wurde*“ (Lörcher 1995a, S.16).

Nach Malles (1993, S. 15f.) Ansicht wird im unterrichtlichen Geschehen „*wenig getan, um das Buchstabenrechnen mit dem Zahlenrechnen in Verbindung zu bringen*“. Syntax und Semantik, das Formale und das Begrifflich-Inhaltliche werden völlig getrennt voneinander behandelt. Das kann dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler das, was sie berechnet haben, mit der Problemstellung nicht nur nicht in Einklang bringen können, sondern in beiden „Systemen“ unterschiedlich auswerten[90]. Lawler sprach in diesem Zusammenhang von „Mikrowelten“ und Bauersfeld verwendete dafür den Begriff „subjektive Erfahrungsbereiche“.

Malle fordert dementspechend nicht nur in der fünften und sechsten Jahrgangsstufe sondern auch ab der 7. Jahrgangsstufe semantische Aspekte im unterrichtlichen Geschehen zu betrachten und zu thematisieren.

[88] Matz 1982 und Davis 1975 beschrieben das Problem in diesem Zusammenhang als Prozess-Produkt-Dilemma
[89] vgl. Booth 1984
[90] siehe hierzu auch Hasemann 1986, S. 4f. im Bereich der Bruchrechnung

Matz (1982, S. 37ff.) beschreibt, wie beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra die Notation zu Fehlern bei Schülerinnen und Schülern führt. Nach Matz sind Konkatenation und besonders das Gleichheitszeichen für eine Reihe von charakteristischen Fehlern verantwortlich.

In der Arithmetik wird Konkatenation verwendet bei der Stellenwertschreibweise und bei gemischten Brüchen: 43 und $4\frac{3}{4}$. Bei gemischten Brüchen steht das nichtgeschriebene Operationszeichen für eine Addition. In der Algebra steht bei xy und 3x das nichtgeschriebene Operationszeichen allerdings für die (symbolische) Multiplikation und häufig (z. B. $4\frac{3}{4}x$) ist alles in einem Ausdruck vorhanden. Ein typischer Konkatenationsfehler ist dementsprechend $4x = 46 \Leftrightarrow x = 6$. Hiermit wird deutlich, *dass „algebra is not the straightforward generalization of arithmetics we belive it to be*" (Matz 1982, S. 38).

Im Bereich der Gleichungen und deren Lösung sind zusätzliche Schwierigkeiten die Bedeutungsveränderung des Gleichheitszeichens und das völlig neue Konzept der Äquivalenzumformungen. Darauf wird im folgenden Teilkapitel genauer eingegangen.

Wiedererkennen und die Verwendung von Strukturen

Kieran (1992) behandelt in ihrem Übersichtsartikel „The Learning and Teaching of School Algebra“ die Frage, warum für eine Mehrheit der Schülerinnen und Schüler das Verstehen der Schulalgebra so schwierig ist. Sowohl der Inhalt der Algebra als auch die Art des Unterrichts und die spezielle Art, wie Schülerinnen und Schüler Schulalgebra lernen, können zu den Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern in diesem Bereich beitragen.

Sie zeigt auf, wie die Entwicklung der algebraischen Symbolik zu einem Wechsel von einer prozeduralen zu einer strukturellen Sichtweise der Algebra führt.

Bei der historischen Entwicklung der Algebra betrachtet Kieran insbesondere die Entwicklung der Notation, der algebraischen Symbole, die Verwendung von Buchstaben („... *the distinction between using letters to represent unknowns in equation solving and using letters to represent givens in expressing general solutions and as a tool for proving rules governing numerical relations.*“ (Kieran 1992, S. 390) und den Gebrauch der Sprache.

Nach Kieran können einige kognitive Prozesse beim Lernen von Schulalgebra in der historischen Entwicklung der Algebra als symbolisches System wiedererkannt werden.

Sie unterscheidet dafür die drei historischen Phasen:

- die *rhetorische* Phase bis Diophant, in der umgangssprachlich Beschreibungen für Lösungen konkreter Probleme angegeben wurden und Symbole und Zeichen für Unbekannte noch nicht verwendet wurden;

- die zweite Phase, die sogenannte *synkopierte* Algebra, in der Buchstaben für die Darstellung von Unbekannten und allmählich, unter dem Einfluß der arabischen Mathematiker und in der Renaissance, Abkürzungen von Worten, wie p für Plus, eingeführt wurden;
- und die dritte Phase der *symbolischen* Algebra ab Vièta, in der Buchstaben für gegebene Größen als auch für unbekannte Größen verwendet werden. „*At this point it became possible to express general solutions and to use algebra as a tool for proving rules governing numerical relations.*“ (Kieran 1992, S.391)

Mit der Entwicklung der algebraischen Notation war und ist die Entwicklung von strukturellen Konzepten verbunden. Bis Viètas Einführung einer symbolischen Algebra wurden bestimmte algebraische Fragestellungen mittels verbaler Beschreibungen gelöst. Diese Anweisungen waren im wesentlichen Beschreibungen von Prozessen zum Rechnen.

Danach wurde Algebra mehr als nur ein „procedural tool“. „... *it allowed the symbolic forms to be used structurally as objects.*“ (Kieran 1992, S.391).

Kieran bezieht sich auf Sfard (1991)[91] und deren Unterscheidung in *strukturelle* (als Objekte) und *prozedurale*[92] (als Prozesse) Vorstellungen von mathematischen Begriffen. Nach Kieran spielt die Entwicklung dieser unterschiedlichen Konzepte im individuellen Lernprozeß bei Schülerinnen und Schülern eine wesentliche Rolle.

Die Betrachtung der historischen Entwicklung der Algebra bedeutet u. a.[93], dass unterrichtsmethodisch eine längere Zeit des Experimentierens nötig sein könnte, bevor prozedurale algebraische Konzepte in strukturelle überführt werden können.

[91] vgl. auch Sfard 1995
[92] Sfard spricht von *operationalen* Prozessen.
[93] vgl. hierzu den Abschnitt zur historischen Entwicklung der Algebra

3.5. Lehr- und Lernschwierigkeiten im Bereich der Gleichungen

In diesem Teilkapitel wird die umfangreiche Arbeit von Matz zu Lehr- und Lernschwierigkeiten bei der unterrichtlichen Behandlung des Gleichungslösens vorgestellt.

Matz (1982) beschreibt die Entwicklung des Gleichungskonzeptes beim Lernen der Schulalgebra als eine der schwierigsten konzeptionellen Änderungen für die Schülerinnen und Schüler. Hierbei muss im Gegensatz zu der Situation beim Einführen von Variablen ein bestehendes Konzept aus der Arithmetik durch ein komplett neues Konzept ersetzt werden. Dies wird zusätzlich dadurch erschwert, dass beide Konzepte die gleiche Schreibweise benutzen.
Bevor Schülerinnen und Schüler die neue Verwendung des Gleichheitszeichens erlernen, müssen sie nach Matz zuerst realisieren, dass da überhaupt etwas Neues zu lernen ist, dass algebraische Gleichungen nicht einfach wie arithmetische Gleichungen mit Buchstaben zu behandeln sind.

In der Arithmetik wird das Gleichheitszeichen vornehmlich dazu benutzt, ein Problem mit seinem numerischen Ergebnis zu verknüpfen. Malle nennt diese Bedeutung des Gleichheitszeichens „Ergibtzeichen".

Außerdem wird es benutzt, um zwei Prozesse (im Sinne einer Berechnung), die das gleiche Ergebnis besitzen, zu verbinden (z. B. $2 \cdot 3 = 3 + 3$) und um einen Prozess mit Schritten, die zu einem Endergebnis führen, darzustellen (z. B. $2(6 - 4)= 2 \cdot 2 = 4$).

Eine derartige Gleichungskette bezeichnet Matz als „Reduktion". Dabei handelt es sich um eine Tautologie. Solch eine tautologische Verwendung des Gleichheitszeichens ist kennzeichnend für die Arithmetik.

Das Gleichheitszeichen bei Gleichungen hat eine andere Bedeutung. Weder die linke noch die rechte Seite einer Gleichung (z. B.: $3x + 3 = 2x + 7$) sagen etwas über die Unbekannte x aus, sondern erst ihre Gleichheit bestimmt diese Unbekannte. Malle nennt diese Bedeutung des Gleichheitszeichens "Beziehungs- oder Vergleichszeichen".

Das Lösen von Gleichungen ist für Matz eine Bestimmung der Einschränkungen der möglichen Werte für die Unbekannte, so dass die Gleichung im Sinne einer Tautologie richtig wird. Für die Schülerinnen und die Schüler, die z. B. nicht erkennen, dass die Lösung einer Gleichung der Wert ist, der die Identität erzeugt, ist dementsprechend eine Probe auch bedeutungslos.

Operationen (Umformungen von Gleichungen), die auf beiden Seiten gleich sind, bezeichnet Matz als „Deduktionen“.

Beim Lösen von Gleichungen werden sowohl Reduktionen als auch Deduktionen verwendet.

Unabhängig von dieser inhaltlichen (semantischen) Unterscheidung ist für Matz die Änderung der „*grafischen Konvention*" zu beachten.

Eine Umformung bedeutet bei Schülerinnen und Schülern üblicherweise ein „von-links-nach-rechts-Arbeiten". Das, was links steht ist ein „vorher"-Ausdruck und das was rechts steht ein „nachher"-Ausdruck. In diesem Sinne sind auch Gleichungsketten zu verstehen: „Das linke geht in das rechte über".

Im Gegensatz dazu ist der Lösungsprozess bei aufzulösenden Gleichungen von oben nach unten zu lesen.

Beim Lösen von Gleichungen gibt es nach Matz drei weitere Beziehungen, die betrachtet werden müssen:

- die Beziehung zwischen aufeinanderfolgenden linken Seiten,
- die Beziehung zwischen aufeinanderfolgenden rechten Seiten und
- die Beziehung zwischen aufeinanderfolgenden Zeilen.

Schülerinnen und Schüler müssen exakt zwischen den Zeilen lesen können, um

(1) die Art der Umformung,
(2) die Beziehung zwischen zwei Umformungen, die jeweils die nächst folgende linke und rechte Seite ergeben und
(3) die Gleichheit oder Ungleichheit der folgenden korrespondierenden Seiten (abhängig von der Art der Umformung)

zu bestimmen.

Die Arbeit mit Gleichungen erfordert, dass man das Gleichheitszeichen als Ergibtzeichen erkennt, wenn es nötig ist und es ansonsten als Beziehungszeichen deutet.

Dies ist nach Matz besonders problematisch, da beim Lösungsprozeß von Gleichungen Reduktionen und Deduktionen durcheinander verwendet werden und häufig mehrere Schritte zu einem zusammengefasst werden.

Eine weitere Schwierigkeit für Schülerinnen und Schüler ist die unterrichtliche Behandlung von Termen und Termumformungen. Bei Termumformungen hat das Gleichheitszeichen die gleiche Bedeutung wie in der Arithmetik: als Ergibtzeichen. Dadurch entsteht zwar eine syntaktische Ähnlichkeit von Formen wie

$$4x + 12 = 4(x + 3)$$

und

$$3x + 3 = 2x + 7$$

Diese Formen besitzen aber eine semantische Unterschiedlichkeit (wenn die erste Form als Reduktion im Sinne einer Tautologie von Termen, also als Termumformung gesehen wird).

Matz hat beobachtet, dass es Schülerinnen und Schüler gibt, die die einzelnen Zeilen beim Lösen von Gleichungen als Tautologien auffassen. Diese Schülerinnen und Schüler versuchen in jeder Zeile das Ergebnis „herauszulesen". Dies kann dazu führen, dass diese Schülerinnen und Schüler davon ausgehen, dass Umformungen, den Ausdruck der linken Seite in den Ausdruck der rechten Seite überführen. Insbesondere bei Beweisen führt dies zu „*völliger Konfusion*"[94].

Wenn man nun annimmt, dass der Umgang mit Axiomen und Sätzen ein Verstehen der Äquivalenzumformungen erzeugen kann, wie dies während der „Neuen Mathematik“ unterstellt wurde, führt dies bei Schülerinnen und Schülern, die ein in diesem Sinne „falsches Leseverhalten" besitzen, zu Schwierigkeiten. Sie können die Stelle nicht lokalisieren, wo die Axiome angewendet werden.

Ein grundsätzliches Problem sieht Matz in der Einführung der Gleichungslehre. Am Anfang werden lineare Gleichungen gelöst, die häufig zu einfach sind, um konzeptionelle Änderungen zum Verständnis des Gleichheitszeichens zu festigen oder gar zu erzeugen.

Als Beispiele nennt Matz folgende drei Gleichungen:

(1) $x - 5 = 17$
(2) $2x + 3 = 3x$
(3) $3x + 2 = 11$

Unter einer „produktorientierten" Sicht sind diese Gleichungen als ähnlich anzusehen. Es gibt Schülerinnen und Schüler, die lösen diese Aufgaben durch „Ausgucken".

Ein Schüler löste Gleichung (2) z. B. auf folgende Weise:
„*You want to make the two sides the same. So the difference between 2x and 3x is an x. The 3 has to make up for the difference, so x is 3*" (Matz, S.42).
Weitere Schülerinnen und Schüler lösten mittels Mustervergleich; z. B. Gleichung (3): 11 ist $3 \cdot 3 + 2$, damit muss x gleich 3 sein.[95]

Mit diesen Beispielen will Matz nicht belegen, dass *clever guessing* ein nicht tragender Zugang ist, sondern, dass eine konzeptionelle und bewusste Än-

[94] Solch ein Verhalten ist häufig in Anfängerveranstaltungen für Mathematikstudentinnen und -studenten zu beobachten; in der Schule kann dies üblicherweise nicht beobachtet werden, da auf Beweistechniken zumeist verzichtet wird.
[95] Mustervergleich führt bei steigender Komplexität der Aufgaben zur rapiden Abnahme des Lösungserfolgs.

derung der Sichtweise zum Lösen von Gleichungen nicht notwendig durch einfache Übungsaufgaben erzeugt werden kann.

Solche einfachen Aufgaben (gemeint ist: im Sinne des Ergebnisses) erzeugen keinen Wechsel hin zu der Idee eines Vergleichszeichens und einer Beziehungsgleichung.

Zu beachten ist aber auf jeden Fall, dass es ein wesentlicher Vorteil von algebraischen Problemen gegenüber arithmetischen ist, dass die Antwort den Prozess zum Lösen repräsentiert.

Zusammenfassung:
Schülerinnen und Schüler müssen erkennen, dass das Gleichheitszeichen bei Gleichungen eine andere Bedeutung besitzt, als sie es bislang gewohnt waren. Damit Schülerinnen und Schüler dieses erkennen, ist es notwendig, dass in der Einführungsphase nicht zu einfache Gleichungen, die durch Raten und Ausprobieren gelöst werden können, behandelt werden. Insofern zeigt sich ein entscheidender Kritikpunkt der „Neuen Mathematik“ an der traditionellen Schulmathematik berechtigt. Außerdem verlangt das Verfahren zum Lösen von Gleichungen eine Vielzahl von Schülervorstellungen über die dazu notwendigen Prozesse. Insofern zeigt sich, dass beim Lösen von Gleichungen, unabhängig von dem syntaktisch-algorithmischen Anteil, die Semantik eine wichtige Komponente darstellt.

3.6. Untersuchungen im Bereich des Lösens von linearen Gleichungen

Im Folgenden werden einige ausgewählte Arbeiten vorgestellt, die Informationen über typische Fehler und Fehlvorstellungen beim Lösen von Gleichungen liefern. Diese dienen unabhängig von Quantifizierungen dazu, eigene Hypothesen und Fragestellungen zu entwickeln und hatten für meine Untersuchung eine entsprechend große Bedeutung. Insbesondere die Aufgabenkonstruktion für meinen Test erfolgte aufgrund der Arbeiten von Davis/Cooney (1978), Cortes (1993), Tietze (1988) und Roser (1991).

Äquivalenzumformung

Steinberg/Sleeman/Ktorza untersuchten 1990 bei 96 Schülerinnen und Schülern aus vier Klassen des 8. und 9. Jahrgangs das Verständnis und Wissen über den Äquivalenzbegriff bei Gleichungen.

Sie legten den Schülerinnen und Schülern 21 Paare von linearen Gleichungen in Form eines schriftlichen Tests vor. Die Schülerinnen und Schüler sollten entscheiden, ob und weshalb diese Gleichungen äquivalent oder nicht äquivalent wären und dies schriftlich begründen.

Vorab wurde den Schülerinnen und Schülern erläutert, dass Gleichungen äquivalent sind, wenn sie „*have the same answer or value for x, or are basically the same*" (Steinberg/Sleeman/Ktorza, 1990, S. 114).

The Number of Students in Each Class Correctly Judging the Equivalence of Each Equation Pair					
	Equation pairs		Mid 8 [96] n=23	Mid 9 n=22	High 9 n=51
1)	x+2=5	x+2-2=5-2	10	15	51
2)	x+2=5	x+2-5=5	13	14	49
3)	x+2=5	x+2-5=5-5	8	15	48
4)	x+2=5	x+2=3	19	18	51
5)	x+2=5	x=5	16	16	50
6)	x+2=5	x+2-99=5-99	7	8	46
7)	x+2=5	x+2-5=0	9	14	46
8)	x+2=5	x=5-2	12	18	48
9)	3x=5+4	3+x=5+4	10	11	46
10)	3x =5+4	3x-3x=5+4-3x	6	16	43
11)	3x =5+4	x=5+4-3	11	15	45
12)	3x =5+4	3x-4=5+4-4	4	14	44
13)	3x =5+4	3x-10x=5+4-10x	4	11	42
14)	2x+3x=10	2x=10-3	19	16	43
15)	2x+3x=10	5x=10	18	15	42
16)	2x+3x=10	2x+3x-10=10-10	6	14	42
17)	2x+3x=10	2x=10+2+3	16	18	43
18)	4+2x=16	4+2x= 16-4	16	18	42
19)	4+2x=16	2x+4=16	18	21	43
20)	4+2x=16	6x=16	11	13	40
21)	4+2x=16	4+2x-4=16-4	12	11	40
22)	Solve: 2x+3=9		19	18	47

Abbildung 38: Steinberg/Sleeman/Ktorza, 1990, S. 115

Die meisten Schülerinnen und Schüler begründeten konsistent aufgrund von Berechnungen oder mit Umformungen. Diejenigen, die mit Hilfe von Umformungen begründeten, hatten eine signifikant höhere Rate von richtigen Antworten.

Die Antworten ließen sich in drei Gruppen einordnen:

(1) Berechnung der Lösungen:

1. Lösen beider Gleichungen und vergleichen der Ergebnisse,
2. Lösen einer Gleichung, Substitution dieser Lösung in die andere Gleichung und überprüfen, ob dieses eine Identität ist;

(2) Entscheidungen aufgrund von Umformungen der Gleichungen:

1. unmittelbares Erkennen, dass die zweite Gleichung durch eine Umformung auf die erste zurückgeführt werden kann (oder nicht),
2. Verwendung von Äquivalenzumformungen, ohne die Gleichung zu lösen, um den Vergleich beider Gleichungen zu erleichtern,
3. termweises Vergleichen in beiden Gleichungen,
4. Erkennen, dass Multiplikation und Addition nicht der gleichen Umformung entsprechen (a + x ist nicht das Gleiche wie ax);

[96] „Mid 8“ bedeutet 8. Klassenstufe „mittleres Level“, „Mid 9“ 9. Klassenstufe „mittleres Level“, „High 9“ 9. Klassenstufe „hohes Level“.

(3) und inkorrekte Lösungen:

1. nur jeweils eine Seite der Gleichungen wurde verglichen,
2. a + x und ax wurden als gleich angesehen,
3. es wurde verlangt, dass exakt die gleichen Zahlen in beiden Gleichungen stehen mussten[97],
4. das Subtrahieren führt zu nichtäquivalenten Gleichungen,
5. „it looks longer", „one equation has more numbers" oder „it looks different",
6. arithmetischer Fehler beim Lösen einer Gleichung.

Die Autoren kamen zum Ergebnis, dass viele Schülerinnen und Schüler über kein gutes Verständnis von Äquivalenzumformungen verfügen.

Die meisten Schülerinnen und Schüler wussten, wie man Äquivalenzumformungen verwendet, um einfache Gleichungen zu lösen; viele von diesen nutzten dies allerdings nicht, um mit einfachen Umformungen die Äquivalenz zu begründen.

Fast ein Drittel aller Schülerinnen und Schüler begründeten die Äquivalenz durch Berechnung der Lösungen. Das kann bedeuten, dass die Schülerinnen und Schüler über keine Definition von Äquivalenzumformungen verfügen und als charakterisierend die „gleiche Lösung" ansehen oder dass sie die Äquivalenz beweisen müssen und ihnen dafür Umformungen nicht ausreichen.

Eine weitere Erklärung der Autoren ist, dass Schülerinnen und Schüler zwar über ein richtiges Konzept von Äquivalenzumformungen verfügen, aber im konkreten Fall dies lieber nochmals nachrechnen.

Ferner ist denkbar, dass Schülerinnen und Schüler statt über jede Aufgabe einzeln nachzudenken, lieber nach einer allgemeinen Routine vorgehen.

Als Folgerung fordern die Autoren eine eigenständige unterrichtliche Behandlung des Konzepts von äquivalenten Gleichungen und nicht nur die unterrichtliche Behandlung als Teil beim Lösen von Gleichungen.

Fehlertypisierungen

Davis/Cooney (1978) kategorisierten die Fehler beim Lösen von linearen Gleichungen auf folgende Weise und lieferten damit Anhaltspunkte darüber, welche Fehler Schülerinnen und Schülern beim Lösen von Gleichungen machen.

1a) Falsche Verwendung der Regeln für die Addition oder Subtraktion von positiven und negativen Zahlen.

Beispiel: $5x + -4 = 8x + 8$
$3x + -4 = 8$

[97] Von den Schülerinnen und Schülern wurde in diesem Sinne begründet, dass $x + 2 = 5$ und $x + 2 – 99 = 5 – 99$ nicht äquivalent sind.

1b) arithmetischer Fehler bei der Addition oder bei der Subtraktion.

Beispiel: $\frac{3}{2}x - 2 = -11$

$\frac{3}{2}x = -8$

2a) Falsche Verwendung der Regeln für die Multiplikation oder Division von positiven und negativen Zahlen.

Beispiel: $24 = -4x$

$6 = x$

2b) arithmetischer Fehler bei der Multiplikation oder bei der Division.

Beispiel: $\frac{2}{5}x = 0$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}x = 0 \cdot \frac{5}{2}$

$x = \frac{5}{2}$

3a) Falsche Verwendung der additiven Eigenschaft der Gleichheit.

Beispiele: $5x + -4 = 8x + 8$

$5x + -4 = -8x + 8x + 8$

$-3 + \frac{3}{4}x = 15$

$\frac{3}{4}x = 15 - 3$

3b) Falsche Verwendung der multiplikativen Eigenschaft der Gleichheit.

Beispiel: $\frac{3}{2}x + 4 - 6 = -11$

$3x + 8 - 12 = -11$

4a) Additiver Koeffizientenfehler.

Beispiel: $\frac{3}{2}x = \frac{5}{7}$

$$-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}x = \frac{5}{7}-\frac{3}{2}$$
$$x = \frac{10}{14}-\frac{21}{14}$$

4b) Multiplikativer Koeffizientenfehler.

Beispiele: $-2x = 24 \Rightarrow x = 12$

$\frac{2}{5}x = -5 \Rightarrow -\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}x = -5\cdot\frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{10}{5}$

5a) Aufgabe nicht beendet[98].

Cortes (1993) untersuchte das Lösungsverhalten von Schülerinnen und Schülern der 7. und 8. Jahrgangsstufe bei Gleichungen und klassifizierte die Fehler, die die Schülerinnen und Schüler dabei machten. Diese Fehler gruppierte er in folgende fünf Kategorien:

1. Fehler im Zusammenhang mit dem Variablen- und Gleichungskonzept
2. Fehler im Zusammenhang mit Äquivalenzumformungen, die damit zusammenhängen, dass die Umformungen nicht auf beiden Seiten identisch durchgeführt werden
3. Fehler, die dadurch entstehen, dass die Reihenfolge der Operation verletzt wird
4. Fehler beim Notieren einer neuen Gleichung
5. Fehler bei numerischen Berechnungen

In der zweiten Kategorie wurden additive und multiplikative Umformungen[99] unterschieden. Bei additiven Umformungen wurde nur eine Seite umgeformt, oder auf der einen Seite wurde addiert und auf der anderen Seite subtrahiert.

Beispiele:

i)
$$25 = 3w - 5$$
$$25 = 3w - 5 + 5$$
$$25 = 3w$$

ii)
$$12z + 45 = 21$$
$$12z + 45 - 45 = 45 - 21$$

[98] Auffällig war, dass dabei die letzte Gleichung immer Brüche enthält.

[99] Äquivalenzumformungen der Art, auf beiden Seiten die gleiche Zahl zu addieren oder zu multiplizieren, interpretiert Cortes als Umformungen, die „etwas von der einen Seite auf die andere rüberbringen".

iii) $39 - 3x = 125$

$-3x - 39 + 39 = 125 + 39$

iv) $95 = 55{,}7x - 150$

$-150 + 95 = 55{,}\ 7x$

Bei multiplikativen Umformungen wurde entweder nur ein Term dividiert oder der Kehrwert gebildet.

Beispiele:

i) $11x + 30 = 14x$

$\frac{11x}{11} + 30 = 14x$

ii) $84y = -35$

$y = \frac{84}{-35}$

In der Kategorie (3) faßte Cortes folgende Fehler zusammen:

Der Koeffizient vor der Variablen wird mit der Konstanten zusammengefaßt.

Beispiel:

i) $40 = 5t + 22$

$40 = 27t$

Bei Gleichungen, die ein Produkt enthalten, wird ein Term in die Klammer eingefügt.

Beispiel:

i) $3(2x + 22) + 34 = 110$

$3(2x + 22 - 22) + 34 = 110 - 22$

Die Multiplikation von Faktoren wird als Addition gesehen.

Beispiele:

i) $5t - 50 = 125$

$5t - 5 - 50 = 125 - 5$

$t - 50 = 12$[100]

[100] Hierbei handelt es sich evtl. um einen Schreibfehler; gemeint ist möglicherweise 120.

ii) $11x - 11x + 30 = 14x - 11x$
$x + 30 = 3x$

iii) $3(2x + 22) = 76$
$3(2x + 22) - 3 = 76 - 3$
$2x + 22 = 73$

Die Reihenfolge von Multiplikation und Addition wird nicht beachtet.

Beispiel:

i) $3(2x - 2 + 24) + 34 = 110$
$3 \cdot 2x + 22 + 34 = 110$

Zu Fehlern der Kategorie (4) gehören:

Weglassen oder falsche Wiedergabe eines Terms.

Beispiele:

i) $57 = \frac{3}{2}y + 12$
$57 = 1{,}5y$

ii) $-37 = 6v + 65$
$6v + 65 = -65$

Weglassen des Minuszeichens.

Beispiel:

i) $39 - 39 - 3x = 125 - 39$
$3x = 86$

Nur der Absolutwert wird beim Zusammenfassen notiert.

Beispiel:

i) $-37 - 65 = 6v + 65 - 65$
$102 = 6v$

Der Absolutwert wird nach einer Division notiert.

Beispiel:

i) $-\frac{3x}{3} = \frac{86}{3}$

$$x = \frac{86}{3}$$

Ein zusätzliches Minuszeichen wird bei einem Term auf einer Gleichungsseite notiert.

Beispiel:

ii) 109y – 25y
-84y

Auffällig ist bei den Beispielen der häufig notierte Zwischenschritt (z. B.:5t – 50 = 125 ; 5t – 5 –50 =125 – 5 bei Cortes), der bei meiner Untersuchung fast gar nicht auftrat. Eine Erklärung dafür wäre, dass es sich dabei um eine französische Eigenart handelt. Allerdings findet sich diese Schreibweise ebenfalls bei den Beispielen von Davis/Cooney.

Tietze (1988) analysierte bei seiner Untersuchung zu Schülerfehlern und Lernschwierigkeiten in der Algebra und Arithmetik mittels dreier Tests bei Aufgaben des Typs ax + b = c knapp 5000 Fehler und isolierte ca. 250 Fehlermuster (Tietze 1988, S.170). Die drei Tests wurden 1981/82 in der 8. Jahrgangsstufe einer integrierten Gesamtschule mit 171 Schülerinnen und Schülern durchgeführt.

Dabei unterschied er unter anderem folgende Fehlermuster (unveröffentlicht):

- richtiger Operationshinweis, aber falsche Operation
- kein oder falscher Operationshinweis und falsche Operation
- sonstige erklärbare Fehler (Ökonomiegedanke, Abwehr von Kompliziertheit)
- Interferenz mit der multiplikativen Aufgabe
- kein oder falscher Operationshinweis und falsche Operation
- additiver Ansatz und additive Rechnung
- Vermischung von multiplikativen und additiven Ansätzen
- Verständnisschwierigkeiten beim Term $\frac{x}{n}$
- nicht klassifizierte, aber (teilweise) erklärbare Sonderfälle
- Lösungsabbruch, nicht klassifizierbare Fehler
- Verletzung des Distributivgesetzes, „falsche" Reihenfolge der Operationen
- die „additive Äquivalenzumformung" wird ignoriert
- die „multiplikative Äquivalenzumformung" wird ignoriert
- fehlerhafter Umgang mit dem Gleichheitszeichen; Weglassen der Terme, die bei Äquivalenzumformungen nicht verändert werden; Veränderungen nur auf einer Seite der Gleichung
- Gleichheitszeichen wird ganz weggelassen
- Faktor vor x wird weggelassen, später aber wieder aufgenommen
- beabsichtiges Addieren/Subtrahieren/Multiplizieren/Dividieren mit x

Das Fehlermuster[101] $a \cdot x = b \;|: a \;\Rightarrow\; x = b - a$ war mit 75 % der gleichungsspezifischen Fehlermuster das häufigste in der 9. Klasse; ferner besaß dieses Fehlermuster mit 70 % ein hohes Konsistenzmaß[102].

Roser (1991) untersuchte in seiner wissenschaftlichen Hausarbeit Fehler beim Lösen von linearen Gleichungen im 7. und 8. Schuljahr der Realschule.

Der Test wurde in 8 Klassen mit 208 Schülerinnen und Schülern durchgeführt. Zur Testkonstruktion verwendete Roser eine Diagnosematrix.

Form A (Form B umgekehrte Reihenfolge)	Zahlen aus IN	Fehler %	negative Zahlen	Fehler %	Brüche und Sonderfall	Fehler %
Typ: x+b=d	3 + x = 8	11%	-7 = -3 + x	17%	$\frac{3}{5} + x = \frac{1}{5}$	37%
Typ: ax=d	2 = x·3	18%	x·(-2) = 3	36%	$\frac{2}{7} = \frac{3}{7}x$	44%
Typ: ax+b=d	4x + 2 = 7	23%	-4 = 2x + 7	31%	$+\frac{4}{9}x + \frac{2}{9} = -\frac{7}{9}$	61%
Typ: ax+b=cx	x·4 = 2 + x·7	36%	-4x – 2 = 7x	37%	$x \cdot \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{7}{5}x$	56%
Typ: ax+b=cx+d	7x + 3 = x·5 – 2	41%	x·(-7) + 3 = 5 – x·2	48%	-5x = -8x	70%

Abbildung 39: Diagnosematrix von Roser 1991

Dabei zeigte sich, dass die Sonderaufgabe -5x = -8x am häufigsten nicht richtig gelöst wurde.

Brüche in einfachen linearen Gleichungen stellen eine sehr große Schwierigkeit dar.

Die Konstruktion der Diagnosematrix und damit verknüpft der Schwierigkeitsdimensionen wurde durch die Untersuchung bestätigt.

Zusammenfassung:
Insgesamt lässt sich kein durchgängiges Konzept zur Fehlertypisierung erkennen. Insbesondere die Frage nach der Reproduzierbarkeit der Fehler ist nicht zu beantworten. Es bleibt unklar, inwieweit die beschriebenen Fehler bei einzelnen Schülerinnen und Schülern eine gewisse Stabilität aufweisen oder als typisch für die gesamte Schülerpopulation anzusehen sind. Außerdem unterscheiden sich die Untersuchungen bei der Systematik der verwendeten Aufgaben. So verwendete z. B. Cortes unterschiedliche Variablenbezeichnungen wie x, w und z. Unabhängig von der nicht zu erkennenden Systematik geben die zitierten Untersuchungen wertvolle Hinweise über tatsächlich gemachte Schülerfehler.

[101] Tietze 1988, S. 175
[102] 70 % der Schülerinnen und Schüler, die diesen Fehler machten, machten ihn mindestens noch einmal.

4. Untersuchung zum Lösen linearer Gleichungen

Im folgenden Kapitel wird die eigentliche Untersuchung vorgestellt. Der Untersuchungsgegenstand ist das Lösungsverhalten von Schülerinnen und Schülern bei einfachen linearen Gleichungen. Dazu habe ich im Frühjahr 1997 in 56 Klassen (bzw. Kursen von Integrierten Gesamtschulen) einen Test mit 18 Aufgaben durchgeführt. Insgesamt nahmen 448 Schülerinnen und 416 Schüler daran teil. Im ersten Teilkapitel wird auf die Konstruktion der Items eingegangen. Wenn im Vorhinein die Schwierigkeitsstufung der Items bekannt gewesen wäre, hätte der Test als diagnostische Matrix angeordnet werden können. Da es aber mit Hilfe der Vortests nicht gelang, Schwierigkeitsdimensionen für die Gleichungen zu isolieren, erfolgte eine Einschränkung des Tests als rein-explorative Studie. Im zweiten Teilkapitel wird die Konstruktion des Tests beschrieben. Im dritten Teilkapitel wird die Durchführung der Tests dargestellt. Das vierte Teilkapitel beschreibt die Einordnung der Untersuchung und damit verknüpfte Fragestellungen. Diese zu untersuchenden Fragestellungen wurden unabhängig vom explorativen Design der Studie im Vorfeld formuliert und entsprechen somit keinen klassischen Hypothesen. Trotzdem liegen diese Fragen auf der Hand und es existieren bei Lehrerinnen und Lehrern und Kolleginnen und Kollegen eine Vielzahl von entsprechenden Vermutungen. Das Kapitel wird mit einer ersten Auswertung abgeschlossen, für die die weitere Entwicklung der Analysesoftware nicht notwendig gewesen wäre.

Für meine Untersuchung zum Lösen einfacher linearer Gleichungen sind im Vorfeld folgende Fragen zu beantworten:

- Welche Art der Fehleranalyse wird verwendet?
- Wie werden die Aufgaben konstruiert?
- Welche Methode der Datenerhebung wird verwendet?

Wie in den vorigen Kapiteln beschrieben, sind diese Fragen nicht unabhängig voneinander zu beantworten. Hier sind Entscheidungen und Festlegungen zu treffen und zu begründen.

Ich gehe davon aus, dass beim Lösen von linearen Gleichungen deutlich nach der unterrichtlichen Behandlung der Kalkül im Vordergrund steht[103] und dass es sich hierbei um eine besonders einfache Form eines Algorithmusses[104] handelt. Ferner zeigen die Untersuchungen hierzu ein nicht einheitliches Bild von den von den Schülerinnen und Schülern gemachten Fehlern.

Dies bedeutet aus meiner Sicht, dass eine quantitative Untersuchung mit einer genügend großen Stichprobe eher als eine qualitative Untersuchung für diesen Untersuchungsgegenstand angemessen ist.

Die Erfahrungen im Zusammenhang mit dem „Buggy Modell“ und die wenig konkreten kognitionstheoretischen Modelle lassen aus meiner Sicht nur eine deskriptive Fehleranalyse zu.

---

[103] Vgl. aber auch Matz, die daraufhin hinweist, wo die Semantik als Ursache von Problemen insbesondere in der Einführungsphase und beim Aufbau von Schülervorstellungen angesehen werden kann.
[104] Der Algorithmus z. B. beim schriftlichen Dividieren ist deutlich komplexer.

Die Aufgabenkonstruktion sehe ich als wesentlich an. Diese sollte deutlich den Untersuchungsgegenstand, nämlich den mathematischen Inhalt und weniger psychologische Modelle wiederspiegeln. Es handelt sich ja um eine mathematikdidaktische Untersuchung, und in diesem Zusammenhang sollte das mathematikdidaktische (Experten-)Wissen auch ausgenutzt werden.

Die vermuteten Schwierigkeitsdimensionen sollen möglichst trennscharf bei der Konstruktion der Aufgaben variiert werden. Eine Aufgabenkonstruktion mit einer Diagnosematrix ist für meine Untersuchung anzustreben.

Um den entscheidenden Mangel bei deskriptiven Fehleranalysen – praktisch ist es unmöglich, den individuellen Lösungsprozess zu analysieren – auszugleichen, soll versucht werden, mit Hilfe des Einsatzes des Computers und spezieller, selbst zu entwickelnder Software diesen zugänglich zu machen. Gerade die Algebra bietet hier gegenüber der Arithmetik den Vorteil, dass die Antwort den Lösungsprozess repräsentiert.

4.1. Aufgabenkonstruktion

Die meiner Fragestellung am nächsten kommende Untersuchung ist die von Roser (1991). In seiner wissenschaftlichen Hausarbeit verwendete Roser eine Schwierigkeitsstufung mit einer Diagnosematrix.

Als Schwierigkeitsmerkmale wurden
- der Zahlenraum (natürliche Zahlen, negative (ganze) Zahlen und Brüche)
- und der Aufgabentyp ($x + b = d$, $ax = d$, $ax + b = d$, $ax + b = cx$ und $ax + b = cx + d$) verwendet.

Dabei zeigte sich, dass beim Vorhandensein von Brüchen die Fehler dramatisch zunahmen. Den größten Fehleranteil besaß mit 70 % der Sonderfall $-5x = -8x$. Problematisch erscheint mir, dass bei den verwendeten Aufgaben die Reihenfolge im Term ax nicht konstant gehalten wurde. So wurden Teilterme $4x$, $x \cdot 5$ und $x \cdot (-2)$ verwendet.

Bei Lörchers Untersuchung (1987) zur Addition und Subtraktion von Termen wurde deutlich, dass durch die Verwendung von Klammern immense Schwierigkeiten verursacht wurden.

Als Schwierigkeitsfaktoren kommen somit in Frage[105]:
- der Typ der Gleichung,
- die Art der Zahlenwerte (aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$),
- die Art der Lösung (aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$),
- Seitenvertauschung,
- ungewöhnliche Reihenfolge auf einer Seite
- Sonderfälle

[105] vgl. auch Lörcher 1995a, S. 24

Lörcher (1998) fasst dies auf folgende Art zusammen[106]:

Dimension	*steigende Schwierigkeit*				
Zahlenraum von a,b,c,d	<10	<1000	>1000	<1	
Zahlbereich von a,b,c,d:	N	Z	B	Q	
Zahlbereich von a-c	N	Z	B	Q	
Linke/rechte Seite	a>c, b<d	a>c, b>d	a<c, b<d	a<c, b<d	
Reihenfolge	ax, cx	xa, xc			
Komplexität	x+c=d	ax=d	ax+b=d	ax+b=cx	ax+b=cx+d
Termumformungen	keine	auf 1 Seite	links/rechts	Klammern	
Sonderfälle bei L	x=0	keine Lösung	∞ viele		

Abbildung 40: Schwierigkeitsstufung bei linearen Gleichungen, Lörcher 1998 S. 3

Unter Zugrundelegung dieser Schwierigkeitsstufung ergab sich eine erste Einschränkung für die Testitems.

- Die Koeffizienten sollten immer ganzzahlig sein.
- Klammern sollten nicht auftreten.
- Die Reihenfolge bei den Teiltermen mit x sollte konstant gehalten werden.
- Auf die Fälle Gleichung mit keiner oder Gleichung mit allgemeiner Lösung wird verzichtet.

Für die konkrete Konstruktion von Aufgaben des Typs Ax + B = Cx + D[107] in Form einer Diagnosematrix waren noch folgende Fragen zu klären:

- Welchen Einfluß hat der Zahlenraum der einzelnen Koeffizienten A, B, C und D[108]?
- Welchen Einfluß hat das Rechnen mit ganzen Zahlen, also die Arithmetik, auf das Lösen von linearen Gleichungen?
- Welchen Einfluß hat die Reihenfolge der Teilterme Ax, B, Cx, D?
- Welchen Einfluß hat ein „führendes Minuszeichen“ bei den einzelnen Gleichungsseiten?
- Welchen Einfluß hat die „konkrete“ Wahl der Koeffizienten A, B, C, D[109]?

[106] Lörcher, G. A.: Schwierigkeitsanalyse bei Aufgaben im MU – Vortrag anläßlich des didaktischen Kolloquiums der Universität Hildesheim am 6.7.1998, 1998 S. 3

[107] Sobald es um Gleichungen geht, die in meiner Untersuchung verwendet werden, habe ich die Koeffizienten mit Großbuchstaben versehen. Dies folgt der Notation bei Prolog, das für Variablen Großbuchstaben verlangt. Obwohl diese Notation sicherlich gewöhnungsbedürftig ist, soll sie zur Kenntlichmachung für konkrete Fragestellungen in meiner Untersuchung dienen und besitzt keinerlei Unterrichtsrelevanz.

[108] z. B.: A und D negativ und B und C positiv.

Vortests

Um Informationen zu den oben genannten Fragestellungen und zur Bearbeitungsdauer zu erhalten, wurden folgende drei Vortests in fünf 9.Klassen integrierter Gesamtschulen im Herbst 1996 durchgeführt[110]:

Vortest1	Vortest2	Vortest3
-8 – 7 =	-8 – 7 =	-8 – 7 =
-25 – 7 =	-1250 – 730 =	-1250 – 730 =
19 – 29 =	19 – 29 =	19 – 29 =
-5 – 8 =	-5 – 8 =	-5 – 8 =
-9 + 7 =	-9000 + 7700 =	-9000 + 7700 =
-6 + 8 =	-6 + 8 =	-6 + 8 =
6x + 4 = 2x + 1	6x + 4 = 2x + 2	6x + 4 = 2x + 2
-4x + 5 = -7x + 3	-40000x+5000 = 70000x+15000	-40000x+5000 = 70000x+15000
3x + 7 = 8x + 4	5x = -2x + 5	4 + 5x = 2x + 5
3 + 2x = 5x +7	13x + 3 = 52	2x + 3 = 5x + 7
-2x + 7 = 3x +5	-2x = 3x + 5	-2x = 3x + 5
3x + 11 = -6x + 3	3x + 3 = -3x + 3	3x + 3 = -3x + 3
-4x + 9 = 3x + 4	-4x – 9 = 3x	-4x – 9 = 3x
3 + 6x = 2x	3 + 6x = 2x – 4	3 + 6x = 2x
6x + 3 = 9 + 3x	6x + 3 = 9 + 3x	6x + 3 = 9 + 3x
-8x + 3 = -6x + 12	600x + 20 = 550x + 80	600x + 20 = 550x + 80
2x + 4 = -5x + 1	2x + 4 = -5x + 4	2x + 4 = -x + 1
-6x = 2x – 1	-6x = 2x – 1	-6x = 2x – 1
-3x – 4 = -2x – 5	-3x – 4 = -2x – 5	-3x – 4 = -2x – 5
6000x + 4500 = 5500	6000x + 4500 = 5500	6000x + 4500 = 5500
3x = 11 – x	-x = 2x –1	3x = 11 – x
5x + 4 = 5x + 1	5x + 4 = 5x + 1	5x + 4 = 5x + 1

Tabelle 5: Vortests

Die Bearbeitungszeiten lagen zwischen 15 und 32 Minuten.

[109] Tietze (1988 S. 178) berichtet, dass Schülerinnen und Schüler die Aufgabe 11x – 5 = 94 erwartungswidrig richtig lösen, obwohl sie nicht algorithmisch vorgehen, sondern inhaltlich zu einer Lösung gelangen. Dies wurde anhand von Protokollen des lauten Denkens deutlich.

[110] Die Vortests 1 und 3 wurden jeweils in 2 Klassen durchgeführt.

Die ersten sechs Aufgaben, die einen möglichen Zusammenhang zwischen den arithmetischen Fertigkeiten im Umgang mit negativen Zahlen und dem Lösen von Gleichungen mit negativen Koeffizienten erkennen lassen sollten, wurden fast durchweg richtig gelöst.

Trotzdem wurden bei Umformungen von entsprechenden Gleichungen Fehler gemacht.

Die Aufgaben mit Koeffizienten nicht aus dem typischen Zahlbereich [-20, 20] wurden deutlich schlechter gelöst; bei der Aufgabe 6000x + 4500 = 5500 wurde mehrfach die Lösung x = -1000 ermittelt.

Aufgaben mit einem „führenden Minuszeichen“ wie

$$-3x - 4 = -2x - 5 \text{ oder}$$
$$-6x = 2x - 1$$

wurden ebenfalls auffällig häufig nicht richtig gelöst.

Ansonsten war das Ergebnis sehr uneinheitlich, so dass eine mögliche Gruppierung der Aufgaben in unterschiedliche Schwierigkeitsstufen aufgrund des vorliegenden Materials nicht möglich schien.

4.2. Testkonstruktion

Eigentlich war geplant, den Test im Sinne einer diagnostischen Matrix unter Einbeziehung von ausgewählten Sonderaufgaben zu konstruieren. Aufgrund der vorgestellten empirischen Untersuchungen sollte dies mit Hilfe der Vortests geschehen. Da die Vortests allerdings ein uneinheitliches Bild ergaben und die in der Literatur vorhandenen Ergebnisse auf einer entweder unsicheren empirischen Basis (in aller Regel standen keinerlei Daten hierzu zur Verfügung) oder im Wesentlichen „typische“ Fehler in Form von Fehlerlisten beschrieben, wurde der Test rein-explorativ angelegt. Das bedeutete einerseits, dass der Umfang der Stichprobe möglichst groß sein sollte und andererseits, dass bei der Testkonstruktion eine möglichst umfangreiche Variation der Aufgaben erfolgen sollte. Um eine halbwegs repräsentative Stichprobengröße zu erhalten, war ich darauf angewiesen, geneigte Schulen und Lehrerinnen und Lehrer zu gewinnen, die bereit waren, an der Untersuchung teilzunehmen. Damit bei der Bearbeitung der Aufgaben keine Ermüdungseffekte eintreten und alle Schülerinnen und Schüler in einer Schulstunde die Aufgaben ohne Zeitdruck bearbeiten konnten, erschien eine Beschränkung auf 18 Aufgaben sinnvoll. Die Variation der sogenannten Grundaufgaben erfolgte unter Beachtung des möglichen Lösungsprozesses. Zusätzlich wurden sechs Aufgaben mit aufgenommen, deren Lösungsverhalten untersucht werden sollte.

Testumfang

Der Test sollte während einer Schulstunde von den Schülerinnen und Schülern absolviert werden. Aufgrund der Erfahrungen bzgl. der Bearbeitungsdauer in den Vortests ergab sich eine Beschränkung auf 18 Aufgaben.
Damit sollte allen Schülerinnen und Schülern genügend Bearbeitungszeit zur Verfügung stehen. Ferner sind die Schülerinnen und Schüler des 9. Jahrgangs einstündige Klausuren gewöhnt, so dass ein Aufmerksamkeitsverlust nicht zu erwarten ist.

Testitems

Der Test wurde aufgrund obiger Vorüberlegungen konstruiert. Allerdings gelang es auch mit den Vortests nicht, zwei Hauptschwierigkeitsdimensionen zu isolieren.
Daraus resultierte folgende Festlegung:

Der Test besteht aus zwölf „Grundaufgaben“, vier Sonderfällen und zwei „speziellen“ Aufgaben.

Da kein hinreichendes Datenmaterial vorliegt, werden die Parameter A, B, C, D mit $A, C \in \{2,...,9\}$ und $B, D \in \{-9,...,9\} \setminus \{0\}$ zufällig[111] bestimmt.

Die Grundaufgaben haben folgende Form:

$Ax + B = Cx + D$

- $A > C$ und $B < D$ (Lösung positiv)
- $A > C$ und $B > D$ (Lösung negativ)
- $A < C$ und $B > D$ (Lösung positiv)
- $A < C$ und $B < D$ (Lösung negativ)

$-Ax + B = Cx + D$

- $-A < C$ und $B > D$ (Lösung positiv)
- $-A < C$ und $B < D$ (Lösung negativ)

$Ax + B = -Cx + D$

- $A > -C$ und $B < D$ (Lösung positiv)
- $A > -C$ und $B > D$ (Lösung negativ)

$-Ax + B = -Cx + D$

- $-A > -C$ und $B < D$ (Lösung positiv)
- $-A > -C$ und $B > D$ (Lösung negativ)
- $-A < -C$ und $B > D$ (Lösung positiv)
- $-A < -C$ und $B < D$ (Lösung negativ)

Die Sonderfälle haben die Form:

$x = D + Cx$
$Ax + B = 0$
$Ax = Cx$
$1000Ax + 1000B = 1000Cx + 1000Dx$

Die „speziellen“ Aufgaben haben die Form:

[111] Das Auswählen der konkreten Werte für A, B, C, D erfolgte mit der Monte-Carlo-Methode.

-A + x = B
-Ax = B

Die Sonderaufgabe x = D + Cx dient der Untersuchung, inwieweit durch das Fehlen eines Faktors beim x auf der linken Seite Schwierigkeiten verursacht werden oder ob durch diese Form („ x = ...“) „das Ziel“ beim Lösen von Gleichungen bereits erreicht ist und dadurch Schwierigkeiten resultieren.

Die Sonderaufgabe Ax + B = 0 entspricht einer typischen und wichtigen Form beim weiteren curriculen Ablauf (etwa: Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse, Nullstellenberechnung), wird aber in den Schulbüchern bei der Behandlung von linearen Gleichungen häufig nicht behandelt. Hier sind Konflikte mit Termumformungen oder im Zusammenhang mit „der fehlenden Seite“ denkbar.

Die Sonderaufgabe Ax = Cx war in Rosers Untersuchung die fehleranfälligste.

Die Sonderaufgabe 1000Ax + 1000B = 1000Cx + 1000Dx zeigte sich in den Vortests als fehleranfällig. Solche Aufgaben werden in den Schulbüchern ebenfalls üblicherweise nicht behandelt.[112]

Allen Sonderaufgaben ist gemein, dass eine solche Form im üblichen Lösungsprozess bei Gleichungen der Form Ax + B = Cx + D üblicherweise nicht entsteht.

Die sogenannten „speziellen“ Aufgaben sind in der Komplexität die leichtesten, sollen aber der speziellen Untersuchung des Konkatenationsfehlers dienen.

Lösungsprozess

Anhand der Grundaufgaben sollen zusätzlich zu den von den Schülerinnen und Schülern gemachten Fehlern die verwendeten Lösungsstrategien und Umformungen analysiert werden.

Im Sinne der Begriffsbildung von Davis/McKnight gehört „globaler Überblick“ zum Lösungsprozess. Die Schülerinnen und Schüler müssen wissen, was das Ziel beim Lösen von Gleichungen ist. Sie müssen wissen, dass sie eine Form „x = ...“ oder „... = x“ erzeugen müssen und sie müssen wissen, wie sie dieses erreichen können. Eine solche Verbalisierung (unabhängig davon, ob ein Schüler sie so benennt oder benennen kann, soll mit Lösungsstrategie („Ziel“) bezeichnet werden.

Folgende zwei Lösungsstrategien sind denkbar.

[112] Denkbar könnte hier sein, dass die Schülerinnen und Schüler es im Bereich der Algebra „gewöhnt“ sind, sich im Zahlenraum der Grundschule zu bewegen (mit Einbeziehung der Brüche und der negativen Zahlen) und bei einer solchen Störung im Sinne der „Kapitänsaufgaben“ das Ergebnis in der gleichen Größenordnung erwarten. Falls sich so was bestätigen würde, hätte das große Auswirkung auf Aufgaben mit Realitätsgehalt und den gesamten Bereich, der im Zusammenhang mit Anwendungsorientierung steht.

L1. „alles mit x auf die linke Seite und durch die Zahl vor dem x teilen[113]"
L2. „alles mit x auf die rechte Seite und durch die Zahl vor dem x teilen"

Weiterhin müssen die Schülerinnen und Schüler wissen, wie sie von einer Zeile zur nächsten gelangen. Dafür sollen die folgenden Umformungen (Äquivalenzumformungen) – sowohl Deduktionen und Reduktionen in der Terminologie von Matz – unterschieden werden:

U1. „das mit x auf die linke Seite" (Addition)
U2. „das mit x auf die rechte Seite" (Addition)
U3. „das ohne x auf die rechte Seite" (Addition)
U4. „das ohne x auf die linke Seite" (Addition)
U5. Division durch den Koeffizienten von x
U6. Seitenvertauschung
U7. Termvereinfachung (Addition)
U8. Termvereinfachung (Multiplikation/Division)
U9. Kürzen

Die erste Umformung hat beim Lösen von Gleichungen entscheidenden Einfluss auf die weiteren Umformungen. Dies gilt insbesondere, wenn die Schülerin oder der Schüler L1 oder L2 als Lösungsstrategie besitzt. Dementsprechend sollen noch folgende „Grundstrategien" bezüglich der ersten Umformung unterschieden werden:

G1. „zuerst das mit x auf die linke Seite" (typische algorithmisierte Vorgehensweise)
- identisch mit U1

G2. „zuerst das mit x dahin, wo es positiv wird" (die Summe der Koeffizienten von x positiv wird)
- je nach Aufgabentyp U1 oder U2

G3. „zuerst das ohne x auf die rechte Seite" (typische algorithmisierte Vorgehensweise)
- identisch mit U3

G4. „zuerst das ohne x dahin, wo es positiv wird" (die Summe der Konstanten positiv wird)
- je nach Aufgabentyp U3 oder U4

G5. Lösen durch Einsetzen (abhängig vom Aufgabentyp)
G6. zuerst dividieren (multiplizieren) zum Vereinfachen des Aufgabentyps (abhängig vom Aufgabentyp)

G1 und G3 entsprechen automatisierten Lösungsverfahren (unabhängig vom Aufgabentyp).
G2, G4, G5 und G6 sind Strategien, die abhängig vom Aufgabentyp sind.

[113] Im Folgenden sollen die entsprechenden „schülernahen" Formulierungen (vgl. auch Malle zu Elementarumformungen) verwendet werden. Die Leserin oder der Leser möge dies in entsprechende exakte Formulierungen „übersetzen".

Deren Verwendung kann Hinweise auf Kontrollmechanismen der Schüler geben (z. B. das Dividieren durch negative Zahlen ist besonders fehleranfällig, deshalb versucht die Schülerin oder der Schüler, einen negativen Vorfaktor beim x zu vermeiden).

Testversionen

Um ein Abschreiben zu verhindern, wurde eine Aufteilung in zwei Tests vorgenommen. Ferner können durch eine unterschiedliche Reihenfolge sequentielle Effekte vermieden oder wenn noch vorhanden erkannt werden.

Die Reihenfolgen der Testversion A und der Testversion B wurden mit Ausnahme der zwei „speziellen" Aufgaben ebenfalls zufällig bestimmt.

Die Sonderaufgaben und die speziellen Aufgaben sind in beiden Testversionen bis auf die Reihenfolge identisch.
Die „Grundaufgaben" in der Testversion B ergaben sich durch Vertauschung der Gleichungsseiten der „Grundaufgaben" der Testversion A.

In Test A wurden die „speziellen" Aufgaben am Anfang gestellt. In Test B werden die „speziellen" Aufgaben am Ende gestellt. Eine Vermutung ist, dass beim Test B häufiger Konkatenationsfehler gemacht werden als bei Test A, da dort durch die Präsentation am Anfang die Schülerin oder der Schüler sich dieses Problems bewusst werden[114], während die Schülerin oder der Schüler bei Test B erst am Ende auf diese Aufgaben stößt[115].

Damit ergaben sich die folgenden Testversionen A und B[116]:

Test A

A1 $-8 + x = 7$

A2 $-6x = 9$

A3 $3x - 8 = 9x + 1$

A4 $3x + 5 = -3x - 2$

A5 $2x - 8 = -7x - 4$

A6 $-7x - 7 = -8x - 5$

A7 $4x + 9 = 9x + 5$

A8 $-6x + 8 = 8x - 8$

[114] im Sinne eines Lernfortschritts
[115] Vorausgesetzt wird, dass die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler den Test in der vorgegebene Reihenfolge bearbeitet.
[116] siehe die eigentlichen Testblätter im Anhang

A9	$8x + 5 = 6x + 7$	
A10	$-3x + 3 = -6x - 2$	
A11	$-7x + 4 = -6x + 5$	
A12	$8x + 9 = 0$	
A13	$-9x - 6 = 5x - 4$	
A14	$x = 5 + 4x$	
A15	$-3x + 8 = -2x - 6$	
A16	$4x = 9x$	
A17	$3000x + 4000 = 2000x + 6000$	
A18	$5x - 5 = 2x - 9$	

Test B

B1	$-8x - 5 = -7x - 7$	vertauscht mit A 6
B2	$-2x - 6 = -3x + 8$	vertauscht mit A 15
B3	$5x - 4 = -9x - 6$	vertauscht mit A 13
B4	$6x + 7 = 8x + 5$	vertauscht mit A 9
B5	$-7x - 4 = 2x - 8$	vertauscht mit A 5
B6	$9x + 1 = 3x - 8$	vertauscht mit A 3
B7	$-6x - 2 = -3x + 3$	vertauscht mit A 10
B8	$3000x + 4000 = 2000x + 6000$	identisch mit A 17
B9	$-6x + 5 = -7x + 4$	vertauscht mit A 11
B10	$2x - 9 = 5x - 5$	vertauscht mit A 18
B11	$8x + 9 = 0$	identisch mit A 12
B12	$9x + 5 = 4x + 9$	vertauscht mit A 7
B13	$-3x - 2 = 3x + 5$	vertauscht mit A 4
B14	$x = 5 + 4x$	identisch mit A 14
B15	$8x - 8 = -6x+8$	vertauscht mit A 8
B16	$4x = 9x$	identisch mit A 16
B17	$-8 + x = 7$	identisch mit A 2
B18	$-6x = 9$	identisch mit A 1

4.3. Durchführung

Der Test wurde in vierzig 9. Klassen aus 10 Schulen mit 864 Schülerinnen und Schülern aus dem Regierungsbezirk Braunschweig[117] von April bis Juni 1997 (also im letzten Viertel des 9. Schuljahrs) durchgeführt.

Dabei handelte es sich um zwei Integrierte Gesamtschulen mit 12 Klassen[118], zwei Realschulen mit 8 Klassen und sechs Gymnasien mit 20 Klassen. Auf Hauptschulen wurde verzichtet.

Der Test fand in der 9. Klassenstufe statt und damit ein bis zwei Jahre nach der systematischen unterrichtlichen Behandlung, um Unterrichtseffekte so weit wie möglich auszuschließen.

Die Klassen waren nicht auf den Test vorbereitet, zum Testzeitpunkt wusste mit Ausnahme von zwei Klassen[119] keine Schülerin und kein Schüler, dass ein Test zum Lösen von linearen Gleichungen durchgeführt wurde. Aus organisatorischen Gründen (zusätzliche Mathematikstunde, Vertretungslehrer) waren einige Klassen darüber informiert, dass eventuell kein üblicher Unterricht stattfindet.

Die Auswahl der Klassen ist weder für Niedersachsen noch für die gesamte Bundesrepublik repräsentativ, da es nur aufgrund persönlicher Kontakte gelang, Schulleiter und Fachlehrer zur Teilnahme zu überreden.

Der Test wurde während des normalen Unterrichts in einer Unterrichtsstunde durchgeführt. In der Mehrzahl der Fälle führte ich den Test selbst durch; lediglich in drei Klassen war aus zeitlichen Gründen (Parallelität) eine Mitarbeiterin mit der Durchführung betraut.

Bei den Integrierten Gesamtschulen ist der Unterricht in der 9. Jahrgangsstufe fachleistungsdifferenziert, so dass die Schülerinnen und Schüler nicht im Klassenverband den Test bearbeiteten sondern gruppenweise und klassenübergreifend.

Der Test begann mit einer kurzen Einführung, wozu dieser Test dienen sollte, dass dieser Test anonym behandelt wird, dass keine Rückmeldung über den Test an den Fachlehrer erfolgt, die Schülerinnen und Schüler allerdings konzentriert und sorgfältig arbeiten sollten.

Taschenrechner waren nicht zugelassen, und alle Nebenrechnungen sollten auf den Testzetteln erfolgen.

[117] Eine Schule stammt aus dem Regierungsbezirk Lüneburg.
[118] Hier wurde zwischen E- und G-Kurs bzw. A1-, A2- und G-Kurs unterschieden.
[119] Zwei Realschulklassen haben unmittelbar vor der Untersuchung das Stoffgebiet Gleichungslösen wiederholt; ob aus Trainingsgründen oder aus stofflichen / curricularen Gründen war nicht zu klären.

Wer mit der Bearbeitung fertig war, sollte sich melden, und dann wurde nach Notieren der Bearbeitungsdauer der Test vom Durchführenden eingesammelt. Inhaltlich wurden keinerlei Vorgaben oder Hinweise gegeben.

Es zeigte sich, dass die überwiegende Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler konzentriert und ernsthaft arbeitete; die Tests derjenigen (ca. 10 Schülerinnen und Schüler) die dieses ersichtlich nicht taten, wurden von der Auswertung ausgeschlossen.

Alle Schülerinnen und Schüler beendeten den Test innerhalb der zur Verfügung stehenden Zeit.

4.4. Einordnung der Untersuchung und damit verknüpfte Fragestellungen

Da es nicht gelang, wie bereits dargelegt, einen Test zu konstruieren, bei dem die Schwierigkeiten der Aufgaben im Vorhinein bekannt sind, und es insbesondere nicht möglich war, Hauptschwierigkeiten zu isolieren, um den Test in Form einer Diagnosematrix anzuordnen, konnte diese Untersuchung nur explorativen Charakter haben.

Das bedeutet, dass es sich bei dieser Untersuchung um kein klassisches Design mit vorab formulierten Hypothesen und dazu gehörenden Signifikanzniveaus handelt.

Nichtsdestotrotz existiert eine Vielzahl von Fragestellungen mit entsprechenden Vermutungen, die aufgrund bekannter Untersuchungen in diesem Bereich und unterrichtspraktischer Erfahrung im Vorfeld bekannt sind. Diese Fragestellungen mit entsprechenden Vermutungen sollen hier dargelegt werden.

Folgende Fragestellungen mit zugehörenden Vermutungen sollen beim Lösen von linearen Gleichungen der Form Ax + B = Cx + D untersucht werden:

1. Der Lösungserfolg hängt stark davon ab, wo der x-Term steht.
   Ax + B = C wird z. B. erfolgreicher bearbeitet als B = Cx + D.
2. Der Lösungserfolg hängt stark von der Komplexität der Aufgabe ab.
   Die leichtesten Aufgaben sind von der Form x + B = D und Ax = D.
3. Besondere Schwierigkeiten sind im Zusammenhang mit der 0 im Ergebnis und der 0 auf einer Seite zu erwarten.
4. Besondere Schwierigkeiten sind zu erwarten, wenn die Koeffizienten A, B, C, D große Zahlen sind, z. B. Tausenderzahlen.
5. Der Lösungserfolg hängt stark von der Anzahl der Minuszeichen in der Aufgabe ab.

6. Eine besondere Schwierigkeit ist ein führendes Minuszeichen bei der Aufgabe.
7. Falls eine Umformungsstrategie verwandt wird, die im letzten Lösungsschritt eine Form mit negativen Koeffizienten vor dem x vermeidet, ist der Lösungserfolg größer.
8. Beim Lösungsprozess werden viele Zwischenschritte notiert.
9. Um so weniger Umformungsschritte gemacht werden, um so größer ist der Lösungserfolg; dies gilt insbesondere wenn zwei Umformungen auf einmal gemacht werden.
10. Geschlechtsunterschiede zwischen Schülern bzgl. des Lösungserfolgs gibt es nicht.
11. Geschlechtsunterschiede zwischen den Unterrichtenden bzgl. des Lösungserfolgs gibt es nicht.
12. Sonderaufgaben wie Ax = Cx und x = D + Cx werden deutlich schlechter gelöst.
13. Fehler nehmen mit den Lösungsschritten ab. Die meisten Fehler werden beim ersten Umformungsschritt gemacht, die wenigsten beim letzten.
14. Die Fehlervielfalt ist insgesamt groß, aber bzgl. jeder einzelnen Aufgabe klein.
15. Die Stellung der Aufgabe innerhalb des Testes ändert den Lösungserfolg nicht.
16. Gleichungen, die im Test für eine Schülerin oder einen Schüler mehrfach vorkommen, werden gleichbehandelt.

Bei der explorativen Analyse ist geplant, unabhängig von diesen Vorabvermutungen weitere interessante Ergebnisse zu erhalten und anzugeben.

4.5. Erste quantitative Auswertung

In diesem Teilkapitel werden erste quantitative Ergebnisse präsentiert, die auch ohne Einsatz des selbstentwickelten Softwaresystems möglich gewesen wären. Dementsprechend werden hier auch noch keine Auswertungen im Zusammenhang mit dem verwendeten Lösungsprozess vorgestellt.

Vergleich des Lösungserfolgs

				Aufgabe richtig gelöst		Fehler bei Umformungen	
				Nein	Ja	Fehler	kein Fehler
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	77	364	76	365
			-6x=9	232	209	228	213
			3x-8=9x+1	243	198	222	219
			3x+5=-3x-2	253	188	233	208
			2x-8=-7x-4	218	223	197	244
			-7x-7=-8x-5	131	310	124	317
			4x+9=9x+5	197	244	178	263
			-6x+8=8x-8	236	205	211	230
			8x+5=6x+7	126	315	118	323
			-3x+3=-6x-2	238	203	218	223
			-7x+4=-6x+5	146	295	142	299
			8x+9=0	235	206	218	223
			-9x-6=5x-4	245	196	231	210
			x=5+4x	269	172	262	179
			-3x+8=-2x-6	147	294	141	300
			4x=9x	274	167	202	239
			3000x+4000=2000x+6000	178	263	171	270
			5x-5=2x-9	240	201	219	222
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7	145	278	141	282
			-2x-6=-3x+8	103	320	96	327
			5x-4=-9x-6	242	181	221	202
			6x+7=8x+5	134	289	124	299
			-7x-4=2x-8	213	210	192	231
			9x+1=3x-8	225	198	214	209
			-6x-2=-3x+3	218	205	204	219
			3000x+4000=2000x+6000	145	278	137	286
			-6x+5=-7x+4	118	305	116	307
			2x-9=5x-5	219	204	200	223
			8x+9=0	195	228	181	242
			9x+5=4x+9	161	262	147	276
			-3x-2=3x+5	230	193	216	207
			x=5+4x	239	184	226	197
			8x-8=-6x+8	199	224	172	251
			4x=9x	272	151	189	234
			-8+x=7	52	371	52	371
			-6x=9	210	213	204	219
Gesamt	Anzahl			7005	8547	6423	9129

Tabelle 6: Lösungserfolg mit Unterscheidung in „richtig gelöst" und „fehlerhafte Umformung", N = 864, Test A: N = 441, Test B: N = 423

Dabei wird für „richtig gelöst" eine Endform der Art „x = d“ oder „d = x“ erwartet. Falls in der letzten Zeile lediglich eine Zahl notiert wurde und diese die Lösung der Gleichung ist, wurde dies auch als richtig akzeptiert.

Es gab aber Schülerinnen und Schüler, die keine Lösung ermittelten, aber bis zum Ende ihrer Bearbeitung keinen Umformungsfehler machten.

				Aufgabe richtig gelöst		Fehler bei Umformungen	
				Nein	Ja	Fehler	kein Fehler
				Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	17,5%	82,5%	17,2%	82,8%
			-6x=9	52,6%	47,4%	51,7%	48,3%
			3x-8=9x+1	55,1%	44,9%	50,3%	49,7%
			3x+5=-3x-2	57,4%	42,6%	52,8%	47,2%
			2x-8=-7x-4	49,4%	50,6%	44,7%	55,3%
			-7x-7=-8x-5	29,7%	70,3%	28,1%	71,9%
			4x+9=9x+5	44,7%	55,3%	40,4%	59,6%
			-6x+8=8x-8	53,5%	46,5%	47,8%	52,2%
			8x+5=6x+7	28,6%	71,4%	26,8%	73,2%
			-3x+3=-6x-2	54,0%	46,0%	49,4%	50,6%
			-7x+4=-6x+5	33,1%	66,9%	32,2%	67,8%
			8x+9=0	53,3%	46,7%	49,4%	50,6%
			-9x-6=5x-4	55,6%	44,4%	52,4%	47,6%
			x=5+4x	61,0%	39,0%	59,4%	40,6%
			-3x+8=-2x-6	33,3%	66,7%	32,0%	68,0%
			4x=9x	62,1%	37,9%	45,8%	54,2%
			3000x+4000=2000x+6000	40,4%	59,6%	38,8%	61,2%
			5x-5=2x-9	54,4%	45,6%	49,7%	50,3%
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7	34,3%	65,7%	33,3%	66,7%
			-2x-6=-3x+8	24,3%	75,7%	22,7%	77,3%
			5x-4=-9x-6	57,2%	42,8%	52,2%	47,8%
			6x+7=8x+5	31,7%	68,3%	29,3%	70,7%
			-7x-4=2x-8	50,4%	49,6%	45,4%	54,6%
			9x+1=3x-8	53,2%	46,8%	50,6%	49,4%
			-6x-2=-3x+3	51,5%	48,5%	48,2%	51,8%
			3000x+4000=2000x+6000	34,3%	65,7%	32,4%	67,6%
			-6x+5=-7x+4	27,9%	72,1%	27,4%	72,6%
			2x-9=5x-5	51,8%	48,2%	47,3%	52,7%
			8x+9=0	46,1%	53,9%	42,8%	57,2%
			9x+5=4x+9	38,1%	61,9%	34,8%	65,2%
			-3x-2=3x+5	54,4%	45,6%	51,1%	48,9%
			x=5+4x	56,5%	43,5%	53,4%	46,6%
			8x-8=-6x+8	47,0%	53,0%	40,7%	59,3%
			4x=9x	64,3%	35,7%	44,7%	55,3%
			-8+x=7	12,3%	87,7%	12,3%	87,7%
			-6x=9	49,6%	50,4%	48,2%	51,8%
Gesamt				45,0%	55,0%	41,3%	58,7%

Tabelle 7: Prozentualer Lösungserfolg mit Unterscheidung in „richtig gelöst" und „fehlerhafte Umformung" N = 864, Test A: N = 441, Test B: N = 423

Auffällig ist, dass die Sonderaufgabe 4x = 9x sowohl im A-Test als auch im B-Test am seltesten richtig gelöst wurde.

Um einen genaueren Überblick über eine Rangfolge der Aufgaben bzgl. des Lösungserfolgs zu erhalten, dienen die beiden folgenden Tabellen.

				Aufgabe richtig gelöst
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	,83
			8x+5=6x+7	,71
			-7x-7=-8x-5	,70
			-7x+4=-6x+5	,67
			-3x+8=-2x-6	,67
			3000x+4000=2000x+6000	,60
			4x+9=9x+5	,55
			2x-8=-7x-4	,51
			-6x=9	,47
			8x+9=0	,47
			-6x+8=8x-8	,46
			-3x+3=-6x-2	,46
			5x-5=2x-9	,46
			3x-8=9x+1	,45
			-9x-6=5x-4	,44
			3x+5=-3x-2	,43
			x=5+4x	,39
			4x=9x	,38
	Test B	Aufgabe	-8+x=7	,88
			-2x-6=-3x+8	,76
			-6x+5=-7x+4	,72
			6x+7=8x+5	,68
			-8x-5=-7x-7	,66
			3000x+4000=2000x+6000	,66
			9x+5=4x+9	,62
			8x+9=0	,54
			8x-8=-6x+8	,53
			-6x=9	,50
			-7x-4=2x-8	,50
			-6x-2=-3x+3	,48
			2x-9=5x-5	,48
			9x+1=3x-8	,47
			-3x-2=3x+5	,46
			x=5+4x	,43
			5x-4=-9x-6	,43
			4x=9x	,36

Tabelle 8: Darstellung einer Rangfolge der Aufgaben nach prozentualen Lösungserfolg, N = 864, Test A: N = 441, Test B: N = 423

Aufgabe richtig gelöst

		Testversion	
		Test A	Test B
Aufgabe	-8+x=7	,	,88
	-8+x=7	,83	,
	-2x-6=-3x+8	,	,76
	-6x+5=-7x+4	,	,72
	8x+5=6x+7	,71	,
	-7x-7=-8x-5	,70	,
	6x+7=8x+5	,	,68
	-7x+4=-6x+5	,67	,
	-3x+8=-2x-6	,67	,
	-8x-5=-7x-7	,	,66
	3000x+4000=2000x+6000	,	,66
	9x+5=4x+9	,	,62
	3000x+4000=2000x+6000	,60	,
	4x+9=9x+5	,55	,
	8x+9=0	,	,54
	8x-8=-6x+8	,	,53
	2x-8=-7x-4	,51	,
	-6x=9	,	,50
	-7x-4=2x-8	,	,50
	-6x-2=-3x+3	,	,48
	2x-9=5x-5	,	,48
	-6x=9	,47	,
	9x+1=3x-8	,	,47
	8x+9=0	,47	,
	-6x+8=8x-8	,46	,
	-3x+3=-6x-2	,46	,
	-3x-2=3x+5	,	,46
	5x-5=2x-9	,46	,
	3x-8=9x+1	,45	,
	-9x-6=5x-4	,44	,
	x=5+4x	,	,43
	5x-4=-9x-6	,	,43
	3x+5=-3x-2	,43	,
	x=5+4x	,39	,
	4x=9x	,38	,
	4x=9x	,	,36

Tabelle 9: Darstellung einer Rangfolge der Aufgaben nach prozentualen Lösungserfolg, N = 864, Test A: N = 441, Test B: N = 423

Die Sonderaufgabe 4x = 9x ist die am seltensten gelöste Aufgabe bei der Untersuchung. Die Sonderaufgabe x = 5 + 4x wird ebenfalls sehr häufig nicht richtig gelöst; allerdings ist der Unterschied von 43% (Test B) und 39% (Test A) beim Lösungserfolg auffällig. Können hier sequentielle Effekte verantwortlich gemacht werden? Diese Aufgabe war allerdings in beiden Tests die 14. Aufgabe. Dies lässt die Vermutung eher unwahrscheinlich erscheinen.

Wie verhält es sich bei den seitenvertauschten Grundaufgaben? Zur Beantwortung dieser Frage dienen die folgenden Tabellen.

Um zu entscheiden, ob die eventuellen Unterschiede zufällig oder nicht zufällig sind, wird χ^2 (nach Pearson) bestimmt. Da in den entsprechenden Kreuztafeln der jeweilige Freiheitsgrad 1 ist, entspricht $\chi^2 > 3{,}84$ einem signifikanten Unterschied (5% Signifikanzniveau), $\chi^2 > 6{,}63$ einem hochsignifikanten Unterschied (1% Signifikanzniveau) und $\chi^2 > 10{,}83$ einem höchstsignifikanten Unterschied (0,1% Signifikanzniveau). Die entsprechenden Werte für χ^2 sind sowohl für „richtig gelöst" und „kein Umformungsfehler" berechnet und angegeben. Signifikante Unterschiede sind grafisch hervorgehoben.

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	77	17,5%	364	82,5%	76	17,2%	365	82,8%
	Test B	Aufgabe	-8+x=7	52	12,3%	371	87,7%	52	12,3%	371	87,7%
Gesamt				129	14,9%	735	85,1%	128	14,8%	736	85,2%

Tabelle 10 $\chi^2 = 4{,}54$ $\chi^2 = 4{,}18$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-6x=9	232	52,6%	209	47,4%	228	51,7%	213	48,3%
	Test B	Aufgabe	-6x=9	210	49,6%	213	50,4%	204	48,2%	219	51,8%
Gesamt				442	51,2%	422	48,8%	432	50,0%	432	50,0%

Tabelle 11 $\chi^2 = 0{,}76$ $\chi^2 = 1{,}04$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	3x-8=9x+1	243	55,1%	198	44,9%	222	50,3%	219	49,7%
	Test B	Aufgabe	9x+1=3x-8	225	53,2%	198	46,8%	214	50,6%	209	49,4%
Gesamt				468	54,2%	396	45,8%	436	50,5%	428	49,5%

Tabelle 12 $\chi^2 = 0{,}32$ $\chi^2 = 0{,}01$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	3x+5=-3x-2	253	57,4%	188	42,6%	233	52,8%	208	47,2%
	Test B	Aufgabe	-3x-2=3x+5	230	54,4%	193	45,6%	216	51,1%	207	48,9%
Gesamt				483	55,9%	381	44,1%	449	52,0%	415	48,0%

Tabelle 13 $\chi^2 = 0{,}79$ $\chi^2 = 0{,}27$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	2x-8=-7x-4	218	49,4%	223	50,6%	197	44,7%	244	55,3%
	Test B	Aufgabe	-7x-4=2x-8	213	50,4%	210	49,6%	192	45,4%	231	54,6%
Gesamt				431	49,9%	433	50,1%	389	45,0%	475	55,0%

Tabelle 14 $\chi^2 = 0,07$ $\chi^2 = 0,05$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-7x-7=-8x-5	131	29,7%	310	70,3%	124	28,1%	317	71,9%
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7	145	34,3%	278	65,7%	141	33,3%	282	66,7%
Gesamt				276	31,9%	588	68,1%	265	30,7%	599	69,3%

Tabelle 15 $\chi^2 = 2,08$ $\chi^2 = 2,77$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	4x+9=9x+5	197	44,7%	244	55,3%	178	40,4%	263	59,6%
	Test B	Aufgabe	9x+5=4x+9	161	38,1%	262	61,9%	147	34,8%	276	65,2%
Gesamt				358	41,4%	506	58,6%	325	37,6%	539	62,4%

Tabelle 16 $\chi^2 = 3,89$ $\chi^2 = 2,90$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-6x+8=8x-8	236	53,5%	205	46,5%	211	47,8%	230	52,2%
	Test B	Aufgabe	8x-8=-6x+8	199	47,0%	224	53,0%	172	40,7%	251	59,3%
Gesamt				435	50,3%	429	49,7%	383	44,3%	481	55,7%

Tabelle 17 $\chi^2 = 3,62$ $\chi^2 = 4,52$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	8x+5=6x+7	126	28,6%	315	71,4%	118	26,8%	323	73,2%
	Test B	Aufgabe	6x+7=8x+5	134	31,7%	289	68,3%	124	29,3%	299	70,7%
Gesamt				260	30,1%	604	69,9%	242	28,0%	622	72,0%

Tabelle 18 $\chi^2 = 0,99$ $\chi^2 = 0,70$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-3x+3=-6x-2	238	54,0%	203	46,0%	218	49,4%	223	50,6%
	Test B	Aufgabe	-6x-2=-3x+3	218	51,5%	205	48,5%	204	48,2%	219	51,8%
Gesamt				456	52,8%	408	47,2%	422	48,8%	442	51,2%

Tabelle 19 $\chi^2 = 0,51$ $\chi^2 = 0,13$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-7x+4=-6x+5	146	33,1%	295	66,9%	142	32,2%	299	67,8%
	Test B	Aufgabe	-6x+5=-7x+4	118	27,9%	305	72,1%	116	27,4%	307	72,6%
Gesamt				264	30,6%	600	69,4%	258	29,9%	606	70,1%

Tabelle 20 $\chi^2 = 2{,}76$ $\chi^2 = 2{,}35$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	8x+9=0	235	53,3%	206	46,7%	218	49,4%	223	50,6%
	Test B	Aufgabe	8x+9=0	195	46,1%	228	53,9%	181	42,8%	242	57,2%
Gesamt				430	49,8%	434	50,2%	399	46,2%	465	53,8%

Tabelle 21 $\chi^2 = 4{,}46$ $\chi^2 = 3{,}80$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-9x-6=5x-4	245	55,6%	196	44,4%	231	52,4%	210	47,6%
	Test B	Aufgabe	5x-4=-9x-6	242	57,2%	181	42,8%	221	52,2%	202	47,8%
Gesamt				487	56,4%	377	43,6%	452	52,3%	412	47,7%

Tabelle 22 $\chi^2 = 0{,}24$ $\chi^2 = 0{,}00$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	x=5+4x	269	61,0%	172	39,0%	262	59,4%	179	40,6%
	Test B	Aufgabe	x=5+4x	239	56,5%	184	43,5%	226	53,4%	197	46,6%
Gesamt				508	58,8%	356	41,2%	488	56,5%	376	43,5%

Tabelle 23 $\chi^2 = 1{,}80$ $\chi^2 = 3{,}14$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-3x+8=-2x-6	147	33,3%	294	66,7%	141	32,0%	300	68,0%
	Test B	Aufgabe	-2x-6=-3x+8	103	24,3%	320	75,7%	96	22,7%	327	77,3%
Gesamt				250	28,9%	614	71,1%	237	27,4%	627	72,6%

Tabelle 24 $\chi^2 = 8{,}47$ $\chi^2 = 9{,}34$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	4x=9x	274	62,1%	167	37,9%	202	45,8%	239	54,2%
	Test B	Aufgabe	4x=9x	272	64,3%	151	35,7%	189	44,7%	234	55,3%
Gesamt				546	63,2%	318	36,8%	391	45,3%	473	54,7%

Tabelle 25 $\chi^2 = 0{,}44$ $\chi^2 = 0{,}11$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	3000x+4000=2000x+6000	178	40,4%	263	59,6%	171	38,8%	270	61,2%
	Test B	Aufgabe	3000x+4000=2000x+6000	145	34,3%	278	65,7%	137	32,4%	286	67,6%
Gesamt				323	37,4%	541	62,6%	308	35,6%	556	64,4%

Tabelle 26 $\chi^2 = 3{,}41$ $\chi^2 = 3{,}84$

				Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
				Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	5x-5=2x-9	240	54,4%	201	45,6%	219	49,7%	222	50,3%
	Test B	Aufgabe	2x-9=5x-5	219	51,8%	204	48,2%	200	47,3%	223	52,7%
Gesamt				459	53,1%	405	46,9%	419	48,5%	445	51,5%

Tabelle 27 $\chi^2 = 0{,}61$ $\chi^2 = 0{,}49$

Die Aufgabe -8 + x = 7 wird im Test B signifikant häufiger richtig gelöst als im Test A. Insgesamt ist es die am besten gelöste Aufgabe und von der Komplexität sehr einfach. Da diese Aufgabe im Test A die erste ist und im Test B die vorletzte, lässt sich diese Abweichung durch einen Lerneffekt während der Bearbeitung interpretieren.

Die Aufgabe 4x + 9 = 9x + 5 wird signifikant schlechter als ihre Umkehraufgabe 9x + 5 = 4x + 5 gelöst. Eine erste Vermutung wäre, dass dies mit der verwendeten Strategie zusammenhängt. Falls als Standardstrategie zum Lösen die Grundstrategie G1 („zuerst das mit x auf die linke Seite“) verwendet wird, muss im ersten Fall beim letzten Umformungsschritt durch eine negative Zahl dividiert werden. Dies könnte besonders fehleranfällig sein.

Das Gleiche könnte auch eine Erklärung für den hochsignifikanten Unterschied bei der Aufgabe -3x + 8 = -2x – 6 und ihrer Umkehraufgabe sein. Nicht zu klären ist allerdings der signifikante Unterschied beim Lösungserfolg der Aufgabe 8x + 9 = 0 in Test A und Test B.

Welche Deutungen gibt es für den unterschiedlichen Lösungserfolg der Aufgaben (siehe Tabellen 6 – 9)? Lässt sich eine Vermutung zur Erklärung für den Schwierigkeitsgrad formulieren? Dazu dienen die folgenden Tabellen. Eine Hypothese war: Ein führendes Minuszeichen stellt eine besondere Schwierigkeit dar.

		Aufgabe richtig gelöst		Fehler bei Umformungen	
		Nein	Ja	Fehler	kein Fehler
Aufgabe mit führendem Minuszeichen	Nein	4264	4376	3831	4809
	Ja	2741	4171	2592	4320
Gesamt	Anzahl	7005	8547	6423	9129

Tabelle 28: Lösungserfolg bei allen 18 Aufgaben mit/ohne führendem Minuszeichen

		Aufgabe richtig gelöst		Fehler bei Umformungen	
		Nein	Ja	Fehler	kein Fehler
		Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent
Aufgabe mit führendem Minuszeichen	Nein	49,4%	50,6%	44,3%	55,7%
	Ja	39,7%	60,3%	37,5%	62,5%
Gesamt		45,0%	55,0%	41,3%	58,7%

Tabelle 29: prozentualer Lösungserfolg bei allen 18 Aufgaben mit/ohne führendem Minuszeichen

Das bedeutet, dass Aufgaben mit führendem Minuszeichen besser gelöst wurden als solche ohne führendes Minuszeichen.

Bei Betrachtung nur der Grundaufgaben, also der in Test A und Test B vertauschten Aufgaben ergab sich folgendes Bild.

		Aufgabe richtig gelöst		Fehler bei Umformungen	
		Nein	Ja	Fehler	kein Fehler
Aufgabe mit führendem Minuszeichen	Nein	2457	2727	2245	2939
	Ja	2170	3014	2032	3152
Gesamt	Anzahl	4627	5741	4277	6091

Tabelle 30: Lösungserfolg bei den 12 Grundaufgaben mit/ohne führendem Minuszeichen

		Aufgabe richtig gelöst		Fehler bei Umformungen	
		Nein	Ja	Fehler	kein Fehler
		Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent
Aufgabe mit führendem Minuszeichen	Nein	47,4%	52,6%	43,3%	56,7%
	Ja	41,9%	58,1%	39,2%	60,8%
Gesamt		44,6%	55,4%	41,3%	58,7%

Tabelle 31: prozentualer Lösungserfolg bei den 12 Grundaufgaben mit/ohne führendem Minuszeichen

Da damit sich ein umgekehrtes Bild ergab, Aufgaben mit führendem Minuszeichen wurden besser gelöst als Aufgaben ohne führendem Minuszeichen, ist die Hypothese nicht haltbar.

Eine andere Erklärung für den Lösungserfolg bei den unterschiedlichen Aufgaben musste gesucht werden.

Ekenstam/Nilsson (1979) hatten bei ihrer Untersuchung gezeigt, dass der Zahlenraum der Lösung einen Einfluss auf den Lösungserfolg hat. Zur Klärung dieser Fragestellung dienen die folgenden Tabellen und Diagramme.

Aufgabe richtig gelöst

		Lösung													
		-1,667	-1,5	-1,333	-1,167	-1,125	-1	-,143	0	,444	,8	1,143	2	14	15
	-8+x=7	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,88
	-8+x=7	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,83
	-2x-6=-3x+8	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,76	,
	-6x+5=-7x+4	,	,	,	,	,	,72	,	,	,	,	,	,	,	,
	8x+5=6x+7	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	-7x-7=-8x-5	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,70	,	,
	6x+7=8x+5	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	-7x+4=-6x+5	,	,	,	,	,	,67	,	,	,	,	,	,	,	,
	-3x+8=-2x-6	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,67	,
	-8x-5=-7x-7	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,66	,	,
	3000x+4000=2000x+6000	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,66	,	,
	9x+5=4x+9	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,62	,	,	,	,
	3000x+4000=2000x+6000	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,60	,	,
	4x+9=9x+5	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,55	,	,	,	,
	8x+9=0	,	,	,	,	,54	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	8x-8=-6x+8	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,53	,	,	,
	2x-8=-7x-4	,	,	,	,	,	,	,	,	,51	,	,	,	,	,
Aufgabe	-6x=9	,	,50	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	-7x-4=2x-8	,	,	,	,	,	,	,	,	,50	,	,	,	,	,
	-6x-2=-3x+3	,48	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	2x-9=5x-5	,	,	,48	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	-6x=9	,	,47	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	9x+1=3x-8	,	,47	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	8x+9=0	,	,	,	,	,47	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	-6x+8=8x-8	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,46	,	,	,
	-3x+3=-6x-2	,46	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	-3x-2=3x+5	,	,	,	,46	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	5x-5=2x-9	,	,	,46	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	3x-8=9x+1	,	,45	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	-9x-6=5x-4	,	,	,	,	,	,	,44	,	,	,	,	,	,	,
	x=5+4x	,43	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	5x-4=-9x-6	,	,	,	,	,	,	,43	,	,	,	,	,	,	,
	3x+5=-3x-2	,	,	,	,43	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	x=5+4x	,39	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,	,
	4x=9x	,	,	,	,	,	,	,	,38	,	,	,	,	,	,
	4x=9x	,	,	,	,	,	,	,	,36	,	,	,	,	,	,

Tabelle 32: Darstellung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Lösung

Aufgabe richtig gelöst

				Lösung nach Zahlenraum				
				natürliche Zahl	negative ganze Zahl	positiver Bruch	negativer Bruch	Sonderfall 0
Aufgabe	-8+x=7	Lösung	15,000000	,88	,	,	,	,
	-8+x=7	Lösung	15,000000	,83	,	,	,	,
	-2x-6=-3x+8	Lösung	14,000000	,76	,	,	,	,
	-6x+5=-7x+4	Lösung	-1,000000	,	,72	,	,	,
	8x+5=6x+7	Lösung	1,000000	,71	,	,	,	,
	-7x-7=-8x-5	Lösung	2,000000	,70	,	,	,	,
	6x+7=8x+5	Lösung	1,000000	,68	,	,	,	,
	-7x+4=-6x+5	Lösung	-1,000000	,	,67	,	,	,
	-3x+8=-2x-6	Lösung	14,000000	,67	,	,	,	,
	-8x-5=-7x-7	Lösung	2,000000	,66	,	,	,	,
	3000x+4000=2000x+6000	Lösung	2,000000	,66	,	,	,	,
	9x+5=4x+9	Lösung	,800000	,	,	,62	,	,
	3000x+4000=2000x+6000	Lösung	2,000000	,60	,	,	,	,
	4x+9=9x+5	Lösung	,800000	,	,	,55	,	,
	8x+9=0	Lösung	-1,125000	,	,	,	,54	,
	8x-8=-6x+8	Lösung	1,142857	,	,	,53	,	,
	2x-8=-7x-4	Lösung	,444444	,	,	,51	,	,
	-6x=9	Lösung	-1,500000	,	,	,	,50	,
	-7x-4=2x-8	Lösung	,444444	,	,	,50	,	,
	-6x-2=-3x+3	Lösung	-1,666666	,	,	,	,48	,
	2x-9=5x-5	Lösung	-1,333333	,	,	,	,48	,
	-6x=9	Lösung	-1,500000	,	,	,	,47	,
	9x+1=3x-8	Lösung	-1,500000	,	,	,	,47	,
	8x+9=0	Lösung	-1,125000	,	,	,	,47	,
	-6x+8=8x-8	Lösung	1,142857	,	,	,46	,	,
	-3x+3=-6x-2	Lösung	-1,666666	,	,	,	,46	,
	-3x-2=3x+5	Lösung	-1,166666	,	,	,	,46	,
	5x-5=2x-9	Lösung	-1,333333	,	,	,	,46	,
	3x-8=9x+1	Lösung	-1,500000	,	,	,	,45	,
	-9x-6=5x-4	Lösung	-,142857	,	,	,	,44	,
	x=5+4x	Lösung	-1,666666	,	,	,	,43	,
	5x-4=-9x-6	Lösung	-,142857	,	,	,	,43	,
	3x+5=-3x-2	Lösung	-1,166666	,	,	,	,43	,
	x=5+4x	Lösung	-1,666666	,	,	,	,39	,
	4x=9x	Lösung	,000000	,	,	,	,	,38
	4x=9x	Lösung	,000000	,	,	,	,	,36

Tabelle 33: Darstellung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Lösung

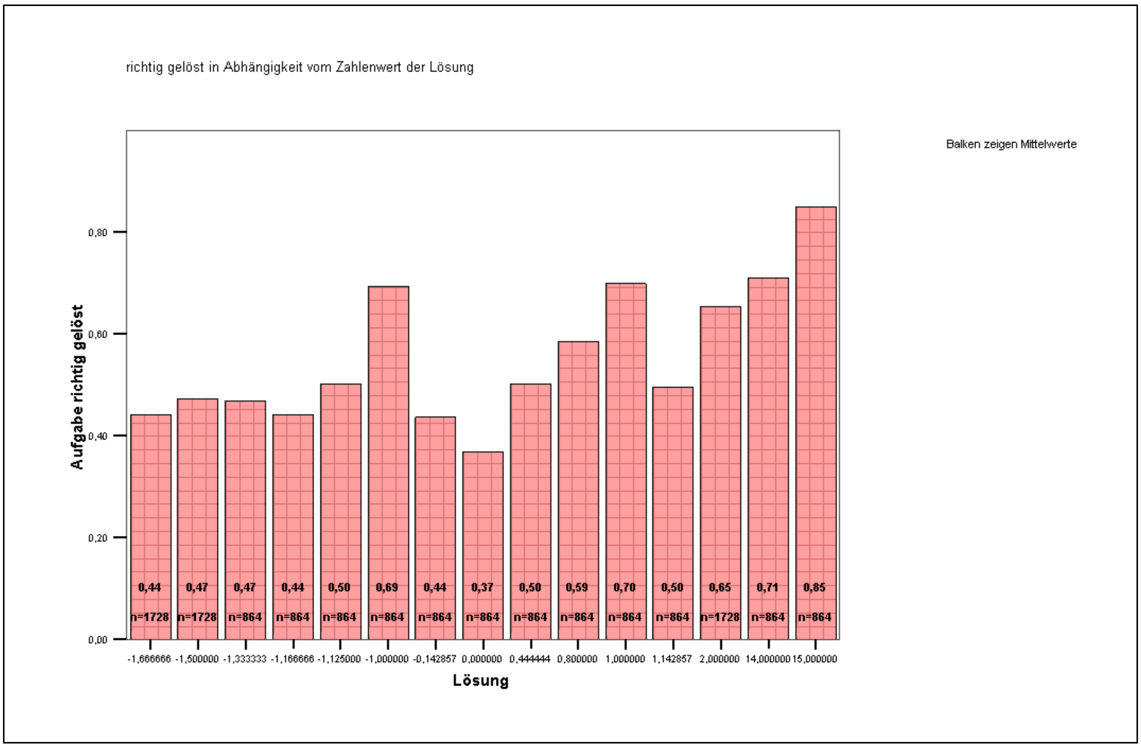


Abbildung 41

Dies legt folgende Darstellung nahe.

			Aufgabe richtig gelöst		
			Nein	Ja	Gesamt
Lösung nach Zahlenraum	natürliche Zahl	Anzahl	1238	3082	4320
		%	28,7%	71,3%	100,0%
	negative ganze Zahl	Anzahl	264	600	864
		%	30,6%	69,4%	100,0%
	positiver Bruch	Anzahl	1224	1368	2592
		%	47,2%	52,8%	100,0%
	negativer Bruch	Anzahl	3733	3179	6912
		%	54,0%	46,0%	100,0%
	Sonderfall 0	Anzahl	546	318	864
		%	63,2%	36,8%	100,0%
Gesamt		Anzahl	7005	8547	15552
		%	45,0%	55,0%	100,0%

$\chi^2 = 886{,}18$ bei df = 4

Tabelle 34: Darstellung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit vom Lösungsraum

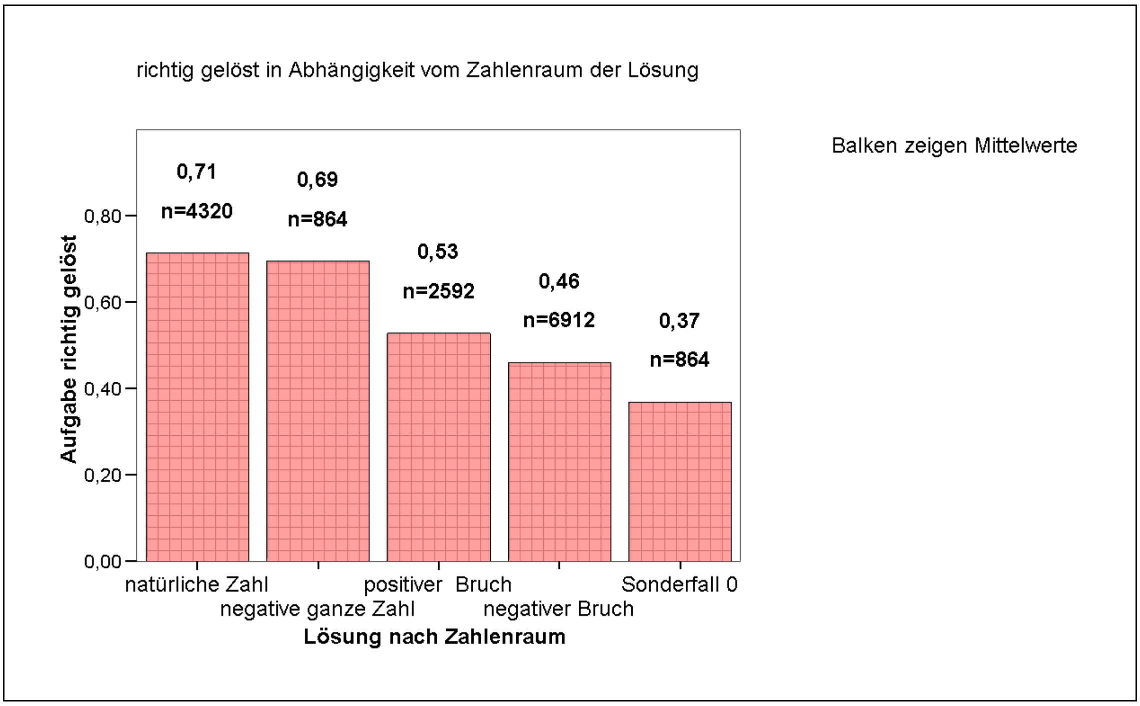


Abbildung 42

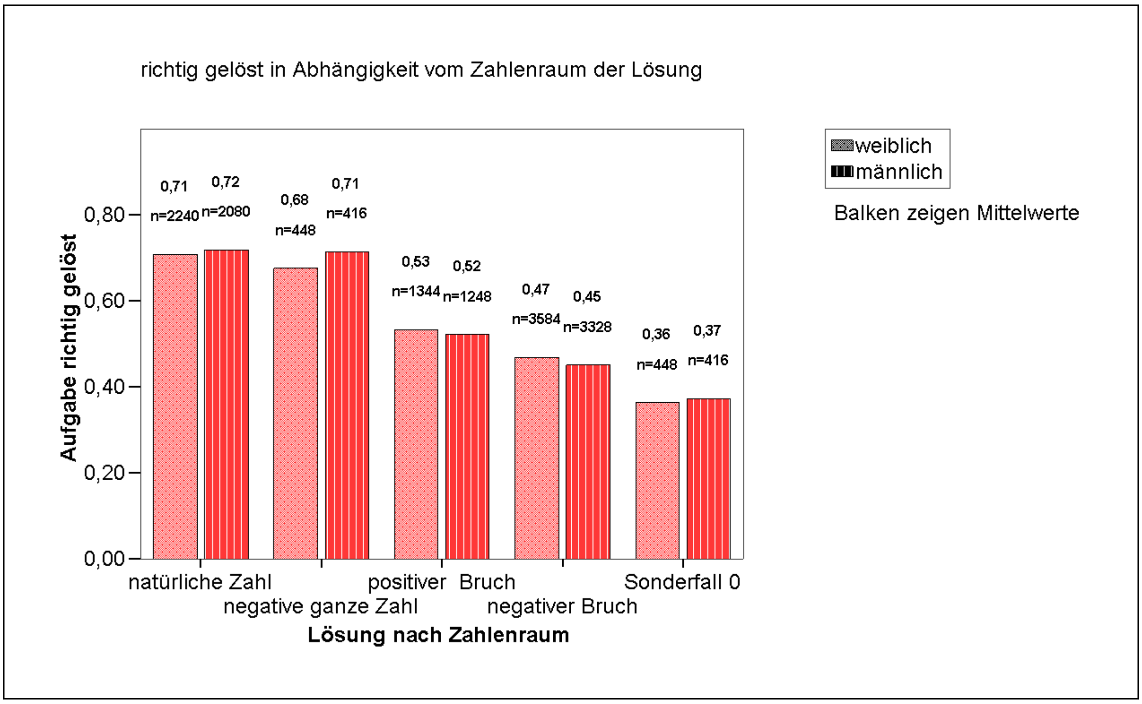


Abbildung 43

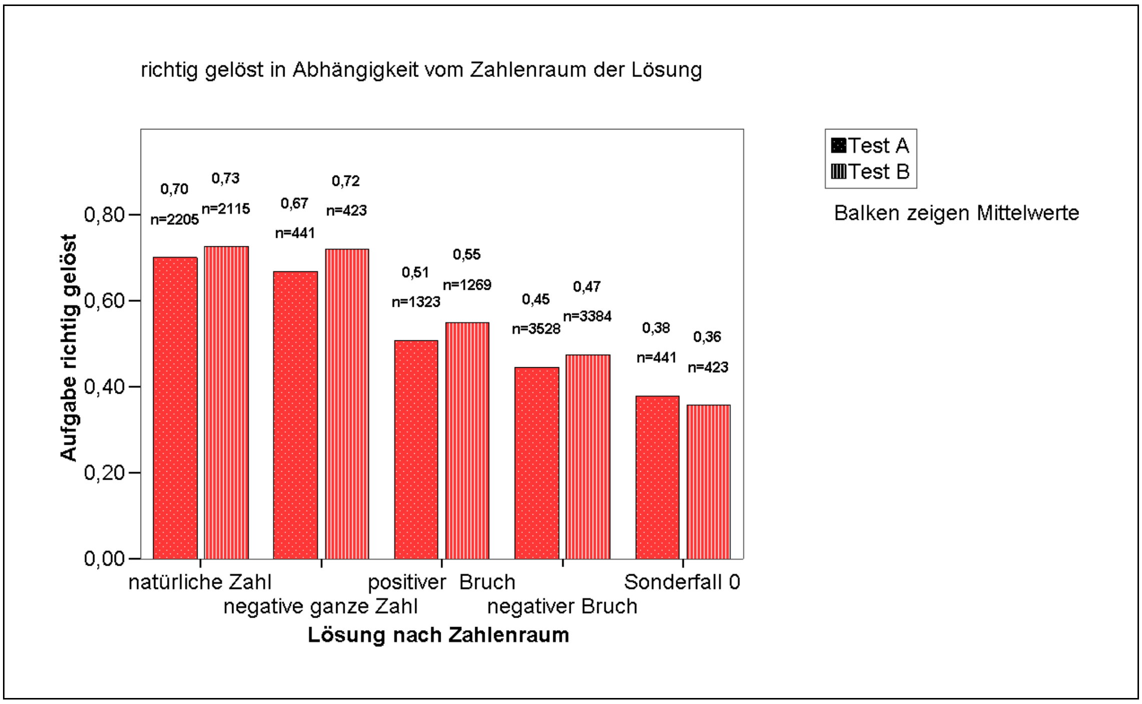


Abbildung 44

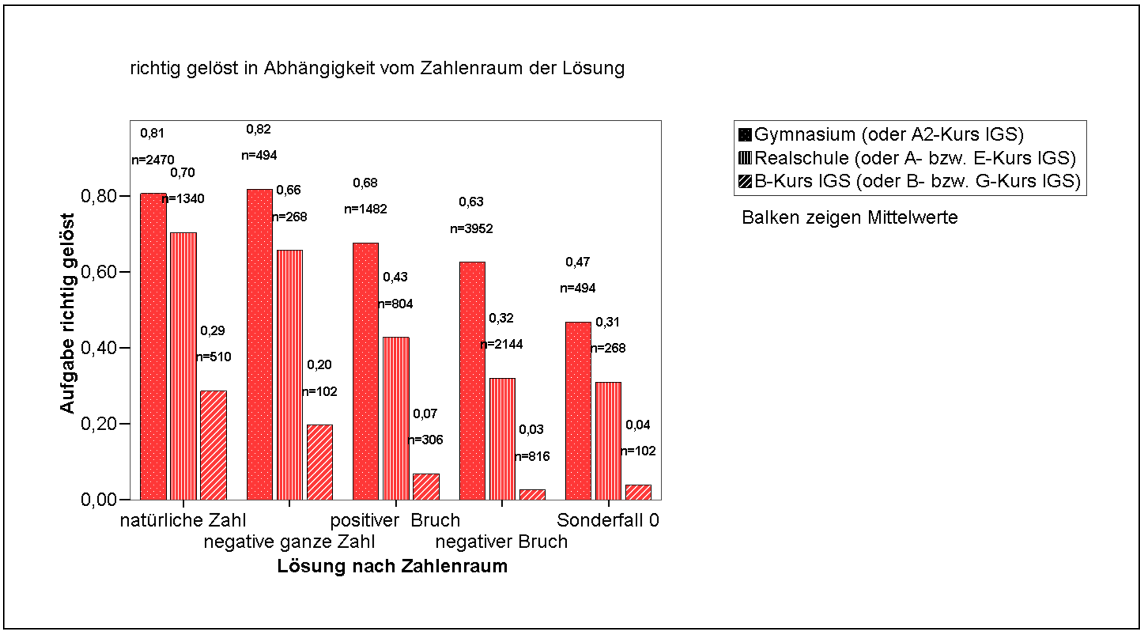


Abbildung 45

Mit Tabelle 34 und den Abbildungen 42 - 45 ist die Abhängigkeit des Lösungserfolgs der Aufgaben vom Einfluss des Lösungsraums deutlich.

Auch bei Aufteilung nach verschiedenen Gruppen ist dieser Einfluss deutlich sichtbar.

Ein geschlechtspezifischer Unterschied beim Lösungserfolg ist nicht feststellbar.

Schülerinnen und Schüler aus Gymnasien lösen deutlich besser als Schülerinnen und Schüler aus Realschulen und diese deutlich besser als Schülerinnen und Schüler aus G-Kursen von Integrierten Gesamtschulen. Dies ist sicherlich nicht verwunderlich, insbesondere, wenn man den prozentualen Anteil der Gleichungslehre am Gesamtmathematikunterricht berücksichtigt. G-Kurs-Schülerinnen und –Schüler wären sicherlich mit Hauptschülern zu vergleichen, die ich in meinem Test absichtlich nicht einbezogen habe.

Damit ist ein Stand der Auswertung wie er z. B. bei Roser zu finden ist, erreicht. Bei meiner Auswertung und der zugehörenden Fehleranalyse soll aber zusätzlich der Lösungsprozess berücksichtigt werden.

Dazu wurde ein Computerdiagnosesystem entwickelt, das in den folgenden Kapiteln beschrieben wird.

Zusammenfassung:
Der durchschnittliche Lösungserfolg von 55% ist enttäuschend. Am Besten gelöst wurde die Aufgabe $-8 + x = 7$, am Schlechtesten die Aufgaben $4x = 9x$, $x = 5 + 4x$ und in Test B die Aufgabe $5x - 4 = -9x - 6$. Es zeigte sich, dass die Lösung (der Lösungsraum) der Aufgaben eine Erklärung für den Schwierigkeitsgrad sein kann. Aufgaben mit ganzen Zahlen als Lösung wurden signifikant besser gelöst als Aufgaben mit Brüchen als Lösung. Besser gelöst wurden hierbei jeweils die Aufgaben mit positiver als die mit negativer Lösung. Die Aufgabe $4x = 9x$ und damit die Aufgabe mit der Lösung 0 wird am Schlechtesten gelöst. Ein geschlechtspezifischer effekt ist nicht feststellbar.

5. Entwicklung eines Computerdiagnosesystems

In diesem Kapitel werden eine Vielzahl an technischen Details beschrieben und informatikspezifische Fachbegriffe verwendet. Da eine solche Beschreibung für Nichtexperten erfahrungsgemäss nicht leicht nachvollziehbar und unter Umständen schwer verständlich sein kann, habe ich versucht, die Lesbarkeit dadurch zu erhöhen, dass ich an vielen Stellen andere Fachbegriffe verwende, als in der Informatik und insbesondere im Bereich der Künstlichen Intelligenz üblich. Die Informatikerinnen und Informatiker bitte ich hiermit um Nachsicht. Die Didaktikerinnen und Didaktiker bitte ich trotz der immer noch komplizierten Darstellung ebenfalls um Nachsicht. Durch die große Anzahl an Beispielen und viele zum Teil wiederholende Ausführungen hoffe ich, dass die Entwicklung dieses Computerdiagnosesystems und die damit verknüpften Perspektiven erkennbar werden.

Beschreibung des Ausgangsproblems

Das Hauptproblem der deskriptiven Fehleranalyse ist, dass der Lösungsprozess und insbesondere der individuelle Lösungsprozess praktisch nicht analysierbar ist.

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass bei einer ersten Feinanalyse häufig zu viele Fehlerkategorien zu bilden sind. „*Meist kann der Forscher die Datenfülle nicht mehr sinnvoll bewältigen*“ (Wellenreuther 1988, S. 280).

Das übliche Vorgehen bei quantitativen Untersuchungen ist die direkte Erstellung einer Urliste aus den Schülerblättern. Dabei geht ein Großteil der Informationen verloren.

Um diese Probleme zu minimieren, werden die Daten der Schülerblätter so genau wie möglich in ein selbstentwickeltes Datenbanksystem übertragen. Damit geht nur noch ein geringer Teil der Informationen verloren (z. B. „mit Bleistift geschrieben“). Die Dateneingabe mit zweimaliger Korrektur benötigte ca. 150 Stunden.

Um den Lösungsprozess zugänglich zu machen, wurde eine Auswertungsroutine entwickelt.

Die Gesamtentwicklungszeit für das Computersystem benötigte im Zeitraum von 2 Jahren ca. 1000 Stunden.

5.1. KEFA

Im folgenden Teilkapitel werden das Programm KEFA und die dazu gehörenden Bildschirmdarstellungen vorgestellt

Das Programm KEFA wurde im Rahmen einer einmaligen Zusammenarbeit zwischen dem Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik und dem Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund der TU Braunschweig entwickelt.

Die Programmierung erfolgte durch Lutz Tandecki im Rahmen einer Diplomarbeit und durch den Verfasser.

Die Datenbankstruktur, das Userinterface und das Frontend wurde von Tandecki nach meinen Vorgaben entwickelt. Die Anpassung an die inhaltliche Fragestellung (Aufarbeitung der Eingaben für die eigentliche Auswertung und Erfassung) sowie der Prologcode wurden von mir programmiert.

Die Eingabesitutation wurde möglichst anwenderfreundlich gestaltet. Die Auswertung der Daten geschieht in Zusammenarbeit zwischen Delphi und Prolog, wobei in Prolog ein Regelwerk als Expertenwissen definiert wurde, das vom Benutzer jederzeit individuell angepasst werden kann.

Delphi bietet hierbei nur das Frontend zum Aufbereiten der Daten für Prolog und zur Verwaltung der Daten und der Ergebnisse, die Prolog zurückliefert.

Die eigentliche Auswertung, Klassifizierung und kategoriale Erfassung von Fehlern geschieht in Prolog. Da das Prolog-Regelwerk bei jedem Programmstart neu geladen wird, ist eine flexible Handhabung des Regelwerks durch verschiedene Benutzer (Experten) möglich. So kann das Regelwerk nachträglich mit einem einfachen Editor geändert und an verschiedenste Situationen angepasst oder der Datenbestand mit dem Expertenwissen verschiedener Autoren ausgewertet werden.

Die Konstruktion von KEFA erfolgte modular, und der Einsatz ist für verschiedene mathematikdidaktische Fragestellungen, bei denen syntaktische und algorithmische Verfahren von Schülerinnen und Schülern getestet werden sollen, mit entsprechenden Adaptionen möglich.

Die folgende Abbildung zeigt das Grobschema des Programmsystems:

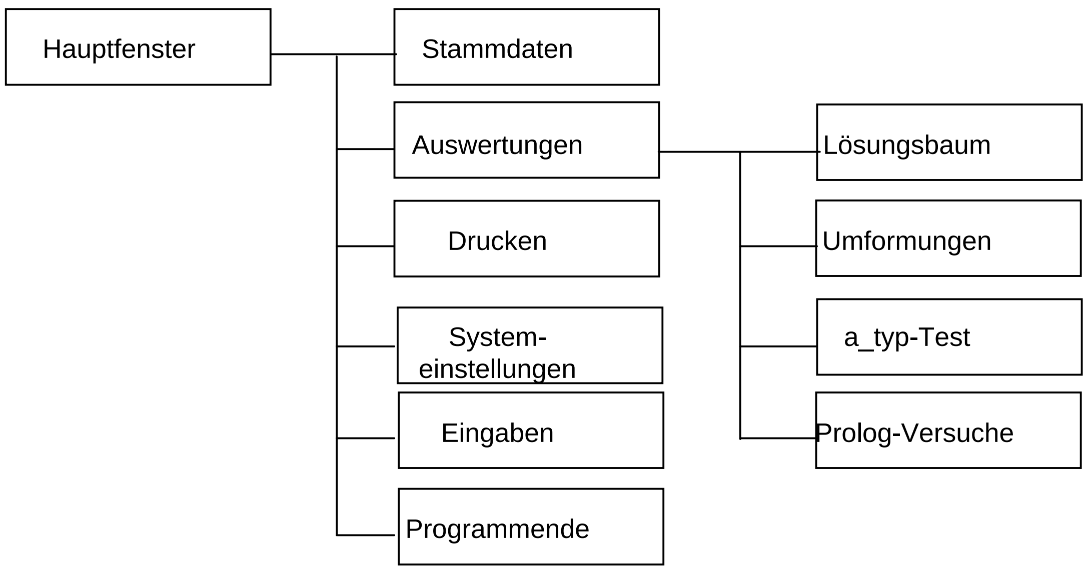


Abbildung 46: Programmstruktur

Dateneingabe und Systembeschreibung

Beim Programmstart gelangt man zuerst in das Hauptmenü. Von hier aus können die verschiedenen Menüpunkte ausgewählt werden.

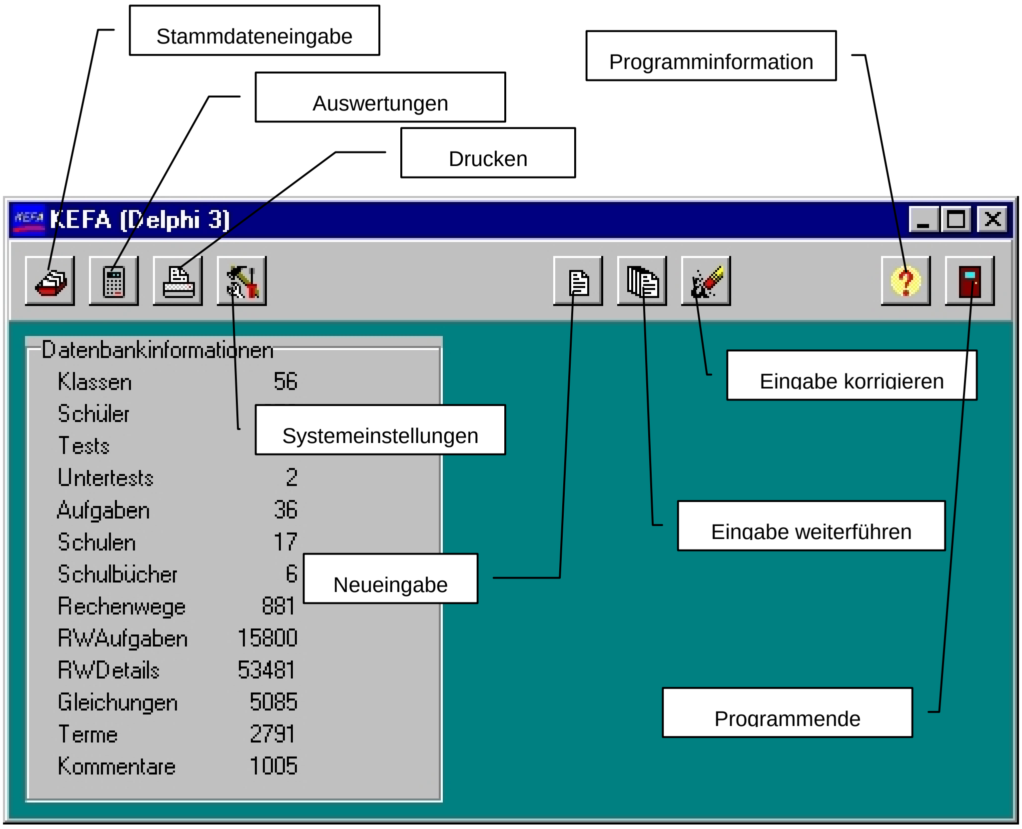


Abbildung 47: Hauptmenü

Stammdaten

Die Stammdateneingabe beinhaltet sowohl die Eingabe der Klassendaten und die Eingabe der Tests. Die Klassen- und insbesondere die Schülerdaten müssen allerdings nicht zwingend über diese Auswahl eingegeben werden. Im Bereich „Neueingabe" kann dies benutzerfreundlich auch erfolgen.

Der Test kann mit Hilfe eines Schnelleditors erstellt werden. Zusätzlich zu der Eingabemöglichkeit werden alle bereits eingegebenen Klassen mit den entsprechenden Schülerinnen und Schülern in Tabellenform dargestellt.

Zu jeder ausgewählten Klasse werden automatisch die entsprechenden Schülerinnen und Schüler im unteren Fensterbereich dargestellt. Mit „Neu“, „Ändern“ und „Löschen“ kann die Datenbank bearbeitet werden. Durch „Neu“ wird ein neuer Datensatz zur Bearbeitung angelegt, mit „Ändern“ wird der momentan aktive (farbig hinterlegte) Datensatz bearbeitet. „Löschen“ entfernt nach einer Sicherheitsabfrage den Datensatz aus der Datenbank.

Beim Neuanlegen und Bearbeiten eines Datensatzes erscheint ein Stammdatenfenster, in dem die Daten bearbeitet oder neu eingegeben werden können.

Klassen-Stammdaten

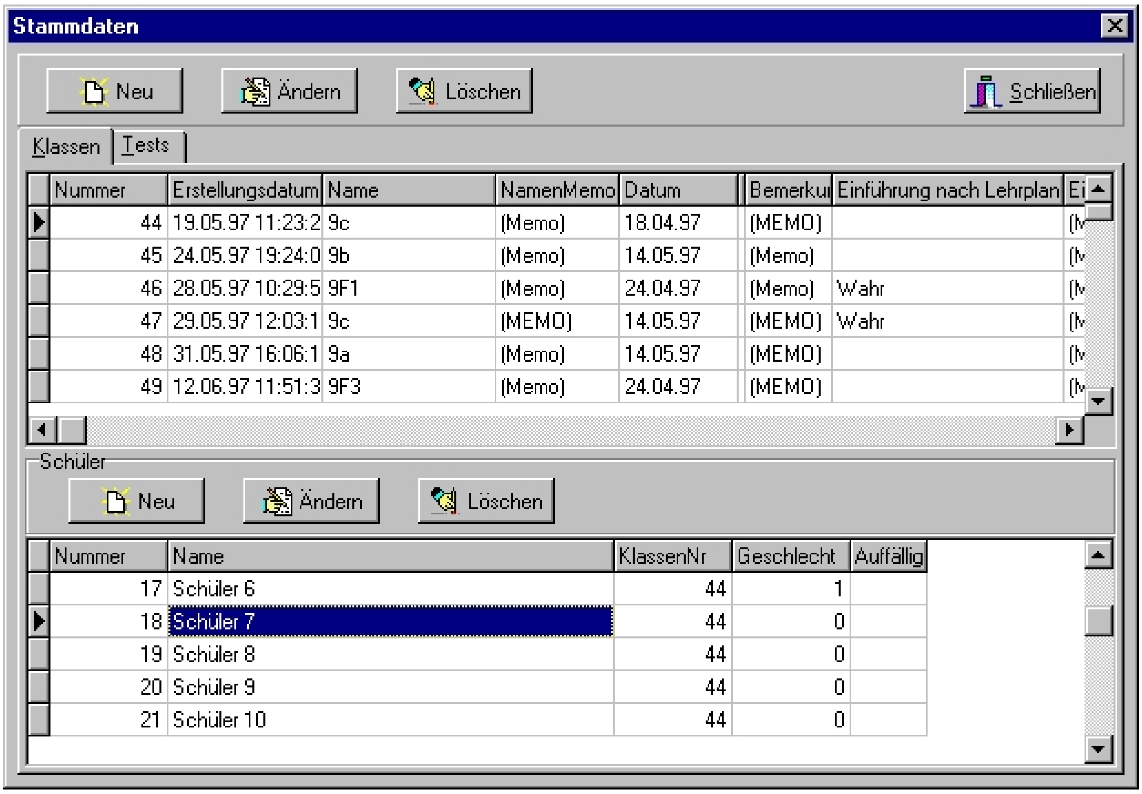


Abbildung 48: Stammdaten

Im Stammdatenfenster für die Klassen können testrelevante Daten eingegeben werden. Dazu gehören das Testdatum mit Schulstunde, ein Hinweis, inwieweit die Klasse sich auffällig verhalten hat, der Name der Schule (üblicherweise anonymisiert), das verwendete Schulbuch und Memofelder, in denen Freitext zur Klasse, zum Kurs, zum eventuell erfolgten Lehrerwechsel und zum Lehrplan eingetragen werden können.

Wichtige einzugebene Daten sind Schulform und Anzahl der Schülerinnen und Schüler. Diese Maske ist auf den untersuchten Test zum Lösen von linearen Gleichungen zugeschnitten.

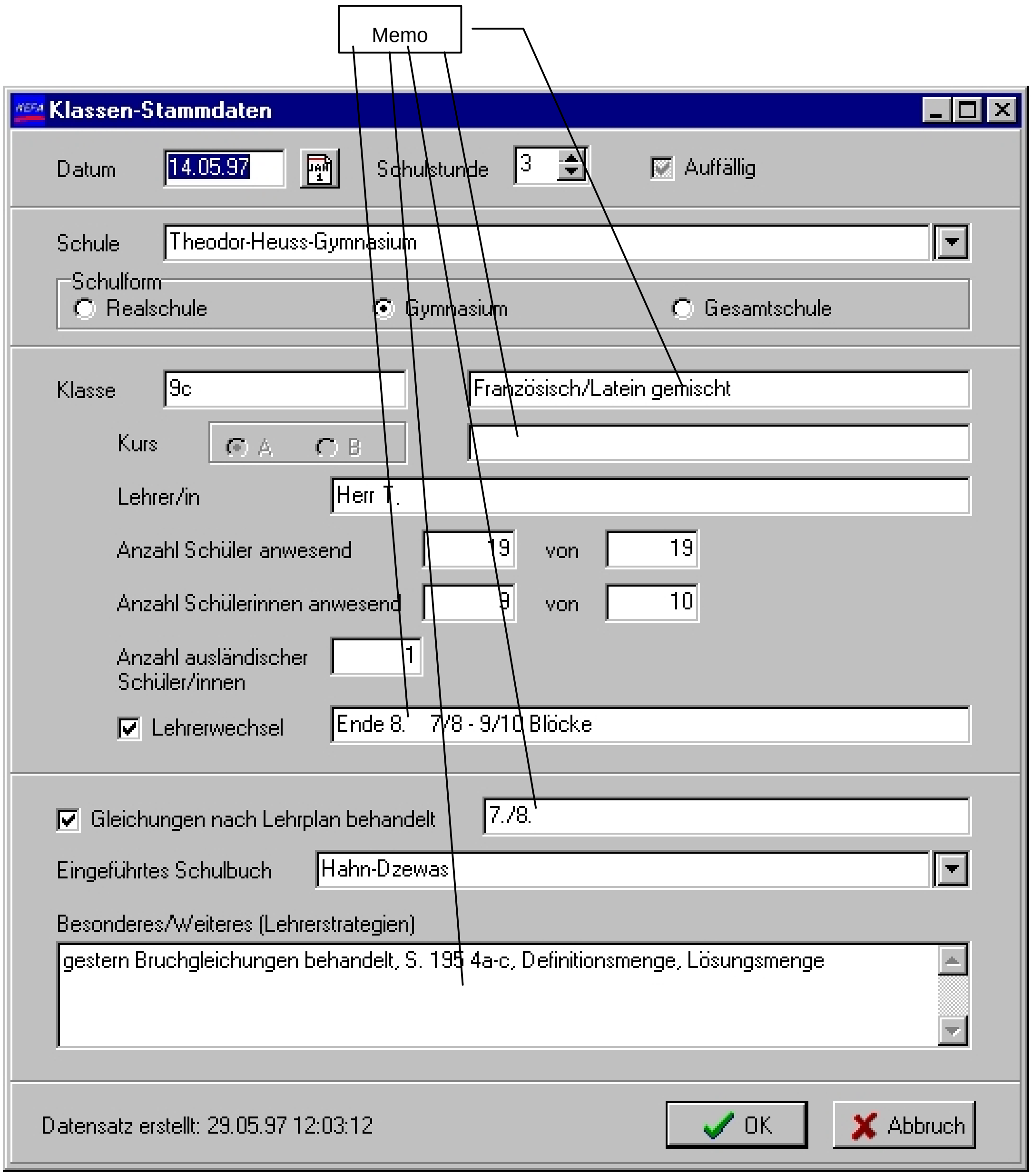


Abbildung 49: Klassen-Stammdaten

Test-Stammdaten

Ähnlich wie bei den Stammdaten zu Klassen/Schüler gibt es auch hier eine sogenannte Master/Detail-Darstellung.

Im oberen Bereich sind die Klausuren, im unteren eine Auswahl zwischen Test A und Test B und die einzelnen Aufgaben des Tests dargestellt. Zur bequemeren Erfassung der Aufgaben gibt es einen Schnelleditor.

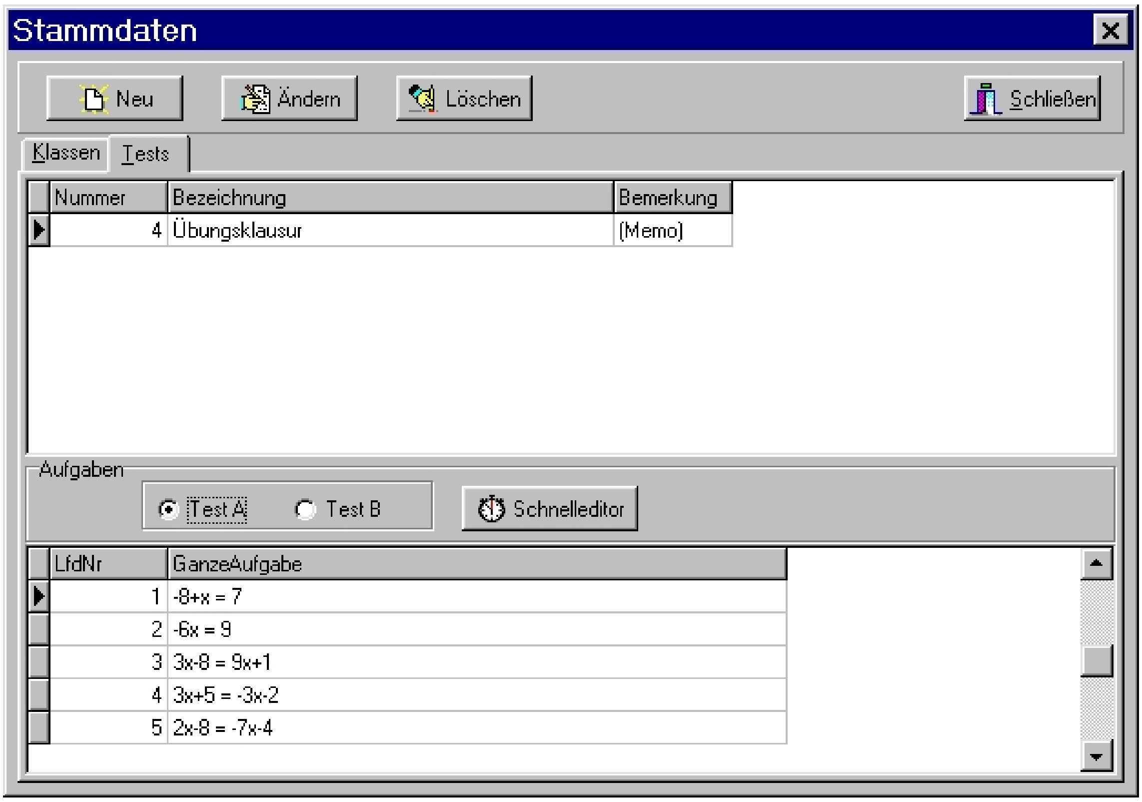


Abbildung 50: Stammdaten der Tests

Bei Auswahl von „Neu“ wird dem Test ein Name gegeben; zusätzlich können Bemerkungen zu diesem Test eingegeben werden.

Abbildung 51: Test-Stammdaten

Der Schnelleditor dient zur einfachen Eingabe der Testitems. Allerdings erfolgen hier keine Warnhinweise zu Syntax usw.

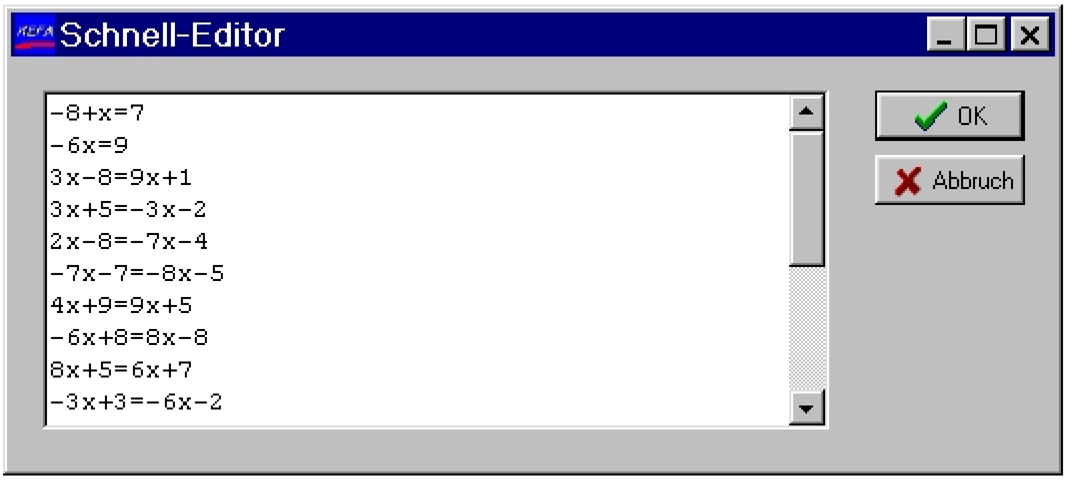


Abbildung 52: Schnelleditor

Datenerfassung

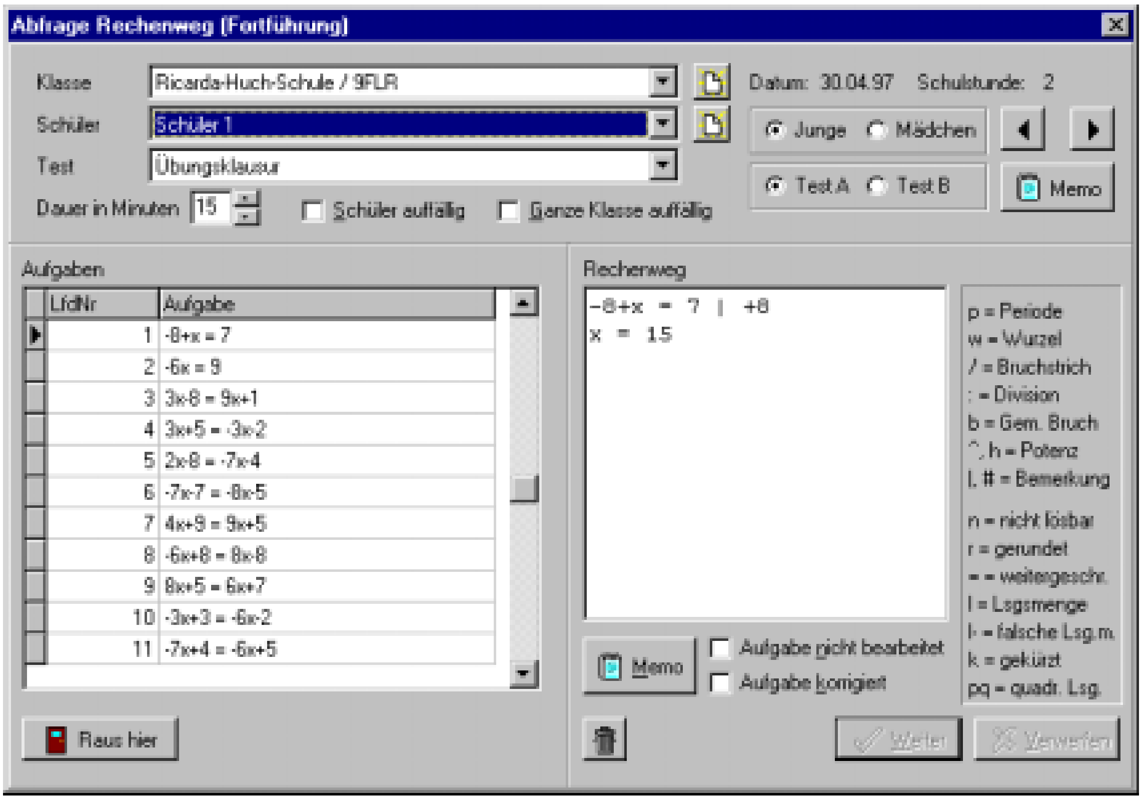


Abbildung 53: Abfrage Rechenweg (Fortführung)

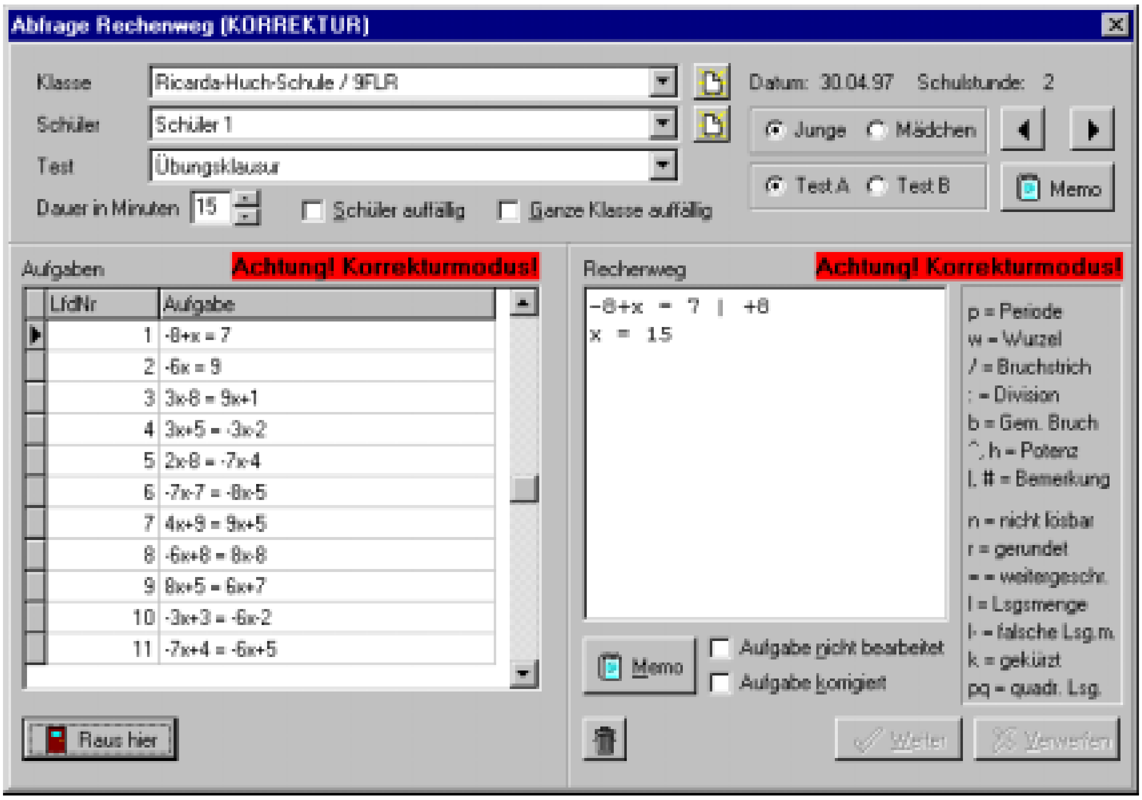


Abbildung 54: Abfrage Rechenweg (KORREKTUR)

Bei der Datenerfassung gibt es drei Möglichkeiten:

- Die Daten können neu eingegeben werden. Dann werden zuerst die Stammdaten der Klasse aufgenommen (s. o.) und danach die Testdaten (Rechenwege) für die einzelnen Schülerinnen und Schüler.
- Die Eingabe kann fortgeführt werden; z. B. wenn nach einer Unterbrechung der Eingabe und Beendigung des Programms weitere Schülerinnen und Schüler zu einer bereits existierenden Klasse dazugefügt werden sollen.
- Die Eingabe kann korrigiert werden; wenn z. B. nach der Dateneingabe Eingabefehler eliminiert werden sollen.

Die obigen Masken dienen der Eingabe der von den Schülerinnen und Schülern durchgeführten Rechenwege.
Nach Eingabe der Klasse, des Schülers und der Klausur erscheint entweder der bereits eingegebene Rechenweg (mit Fortsetzung der Eingabe) oder es besteht die Möglichkeit, den Rechenweg neu einzugeben.
Um eine neue Klasse oder einen neuen Schüler zu erfassen, muss man nicht in die Stammdaten wechseln. Ein Klick auf die Taste neben der Klasse oder der Schülerin bzw. des Schülers legt einen neuen Datensatz an.
Im Korrekturmodus können Fehleingaben korrigiert werden. Allerdings ist zu beachten, dass in diesem Fall keine Sicherheitsabfragen z. B. beim Abspeichern mehr erfolgen und dieser Modus bei "normaler" Dateneingabe üblicherweise nicht zur Verfügung steht.

Mit den Pfeiltasten im rechten oberen Fensterbereich kann man durch die zu den einzelnen Klassen bereits gespeicherten Schülerinnen und Schüler blättern.

Bei der Eingabe der Rechenwege sind alle von der Schülerin bzw. dem Schüler gemachten Notationen möglich.
Um diese Übernahme der schülerspezifischen Notation zu erleichtern, sind einige Tasten als "hotkeys" vom Programm belegt wurden. Andere Tasten sind gesperrt, um Fehler bei der Programmeingabe zu minimieren.

Die Eingabe der Rechenwege erfolgt im rechten unteren Bereich.

Operationshinweise erfolgen, wie bei den Schülerinnen und Schülern während des Tests durchgehend verwendet, direkt hinter der Zeile durch einen senkrechten Strich | abgetrennt.

Die beiden folgenden Tabellen zeigen die programmspezifische Syntax für die Eingabe von Zahlen und Zeichen und für die Eingabe von Operationshinweise bzw. Kommentaren.

Erklärung	Zeichen	Beispiel	Schülernotation
Periodische Darstellung	p	1,p6	$1,\overline{6}$
Bruch	/	2/3	$\frac{2}{3}$
Division	:	2:3	$2:3$
Gemischter Bruch	b	1b2/3	$1\frac{2}{3}$
„Punkt Punkt Punkt“	_	0,444_	0,444...
Wurzeln	w	w(2)	$\sqrt{2}$
Potenzen	h oder ^	x^2 oder xh2	x^2

Tabelle 35: programmspezifische Syntax von Zeichen

Erklärung	Zeichen	Beispiel	Schülernotation
Einleitung der Bemerkung	| oder #[*]	# +7	| +7
„nicht lösbar“	n	| n	$3 \neq 7$
gerundet	r	| r	$x \approx 3$
Lösungsmenge angegeben	l	| l	$IL = \{3\}$
falsche Lösungsmenge angegeben	l-	| l-	$IL = \{3\}$
gekürzt	k	| k	$\frac{6}{9} = \frac{3}{4}$
pq-Formel angewendet	pq[♣]	| pq	

Tabelle 36: programmspezifische Synax von Operationshinweisen und Bemerkungen

Fehlerhafte Eingaben werden entweder gar nicht vom System angenommen oder in einem Hinweis-Fenster dargestellt und müssen dort korrigiert werden.

Dies gilt auch für Warnungen (wenn z. B. in einer Zeile mehr als ein Gleichheitszeichen verwendet wurde); diese müssen allerdings nicht korrigiert, sondern lediglich bestätigt werden.

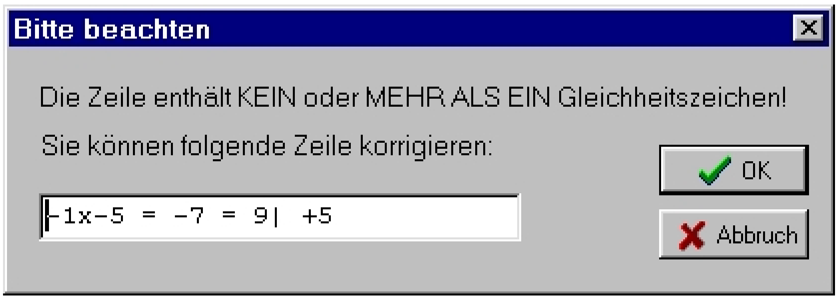


Abbildung 55: Warnhinweise

Bei der Neueingabe eines Rechenweges wird zuerst eine neue Klasse angelegt und deren Stammdaten abgefragt.

[*] Um die Eingabe der Daten mit der Tastatur zu erleichtern kann anstelle des Zeichens | das Zeichen # verwendet werden. Das Zeichen # wird dann als | dargestellt.

[♣] Diese Bemerkung wurde zusätzlich aufgenommen, da einige Schülerinnen und Schüler aus linearen Gleichungen quadratische „machten“ und diese dann mit der „pq-Formel“ lösten.

Danach wird sofort nach den Daten des nächsten (bzw. ersten) Schülers gefragt, und man gelangt in die Eingabemaske.

Sobald der Rechenweg der letzten Aufgabe des Schülers bestätigt wurde, fragt das System, ob ein weiterer Schüler eingeben werden soll. Falls dies der Fall ist, wird das Geschlecht, die Testversion und die Bearbeitungszeit abgefragt. Damit wird bei der folgenden Rechenwegeingabe die entsprechende Testversion vorgegeben.

Aus Anwendergründen war es sinnvoll, hier schon Geschlecht und Bearbeitungszeit einzugeben, da sonst diese Daten leicht vergessen werden konnten.

Abbildung 56: Frage „weiterer Schüler“

Systemeinstellungen

Bei den Systemeinstellungen werden die entsprechenden Pfade für die Daten und das Prologregelwerk festgelegt und einige nützliche Einstellungen für die Dateneingabe vorgenommen.

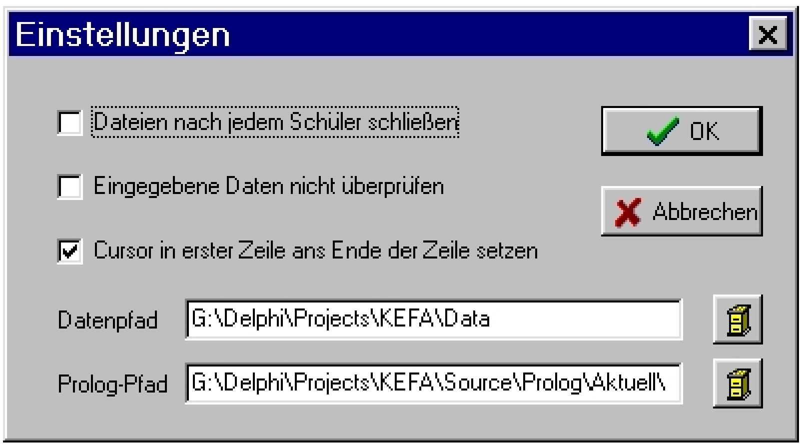


Abbildung 57: Systemeinstellungen

Drucken

Die Rechenwege der Schülerinnen und Schüler können ausgedruckt werden. Entweder geschieht dies direkt, oder die Daten können in eine Datei gedruckt (umgeleitet) werden. Die ausgebene Syntax ist die vom System verwendete und nicht die der Schülerinnen und Schüler.

In erster Linie hilft diese Option bei der Korrektur von Eingabefehlern.

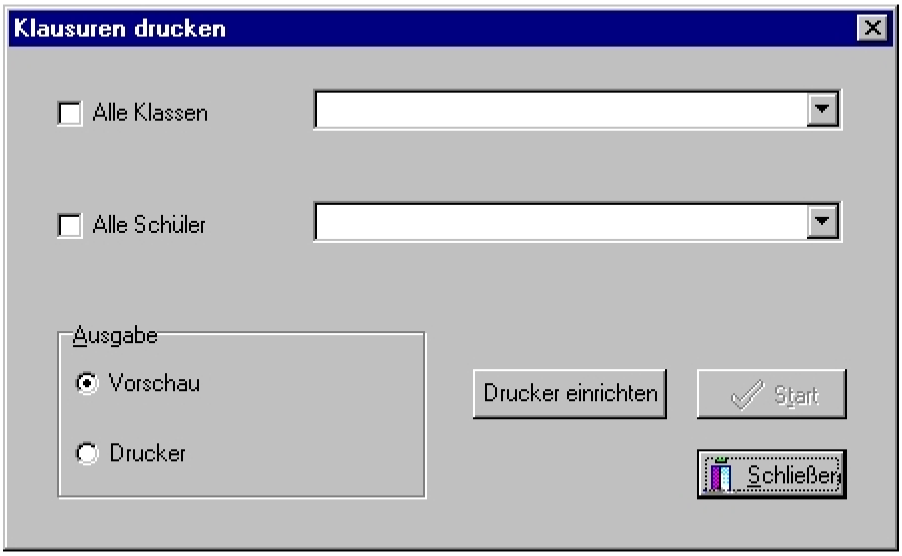


Abbildung 58: Drucken

Auswertungen

Der Bereich der Auswertungen stellt das eigentliche Herzstück von KEFA dar. Hier können die eingegebenen Daten (Rechenwege) untersucht, auf verschiedene Art dargestellt und mit dem Prologregelwerk analysiert werden.

Als Auswertungen sind die Darstellung in Form eines Lösungsbaumes oder die Auswertung mittels Prolog möglich.

Zusätzlich kann noch die Überprüfung der prologspezifischen Syntax erfolgen. Dies betrifft den deklarativen Teil der Gleichungstyperkennung und die Übersetzung der in Delphi eingebenen Daten in Prolog mit Syntaxüberprüfung (diese beiden Teile sind im eigentlichen Sinne keine Auswertungen, sondern dienen lediglich der Entwicklung und Validierung des Prologcodes).

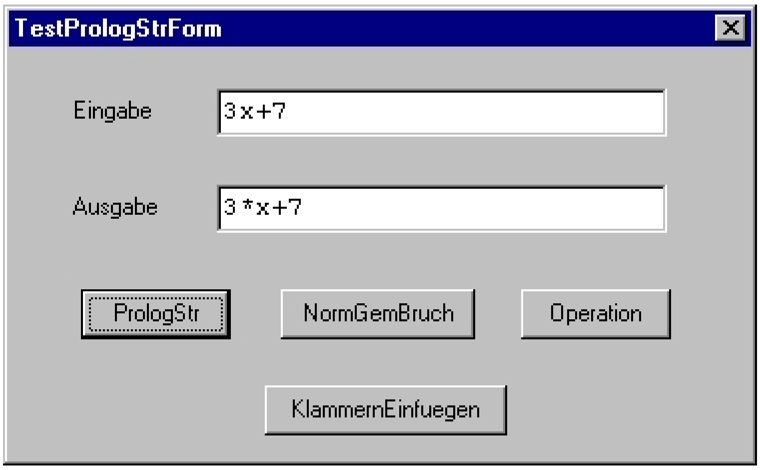


Abbildung 59: Test der Syntax[120]

Lösungsbaum

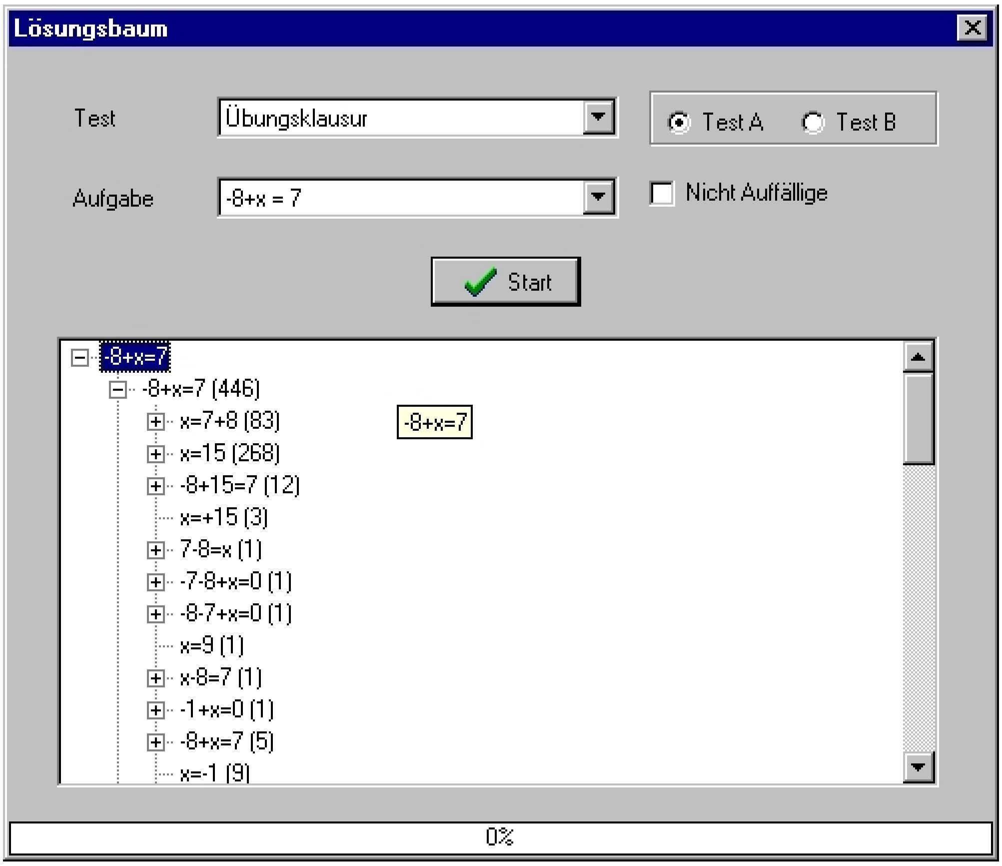


Abbildung 60: Lösungsbaum

Der Lösungsbaum zeigt alle Umformungen, die von den Schülerinnen und Schülern bei einer Aufgabe gemacht wurden.

[120] Hier kann man ersehen, wie Delphi die Eingaben für Prolog aufarbeitet.

In einer Baumstruktur werden die einzelnen Umformungsschritte und die Anzahl der Schülerinnen und Schüler angegeben, die diesen Schritt ausgeführt haben.

Mit einem Klick auf die rechte Maustaste können Baumoperationen durchgeführt oder Detailinformationen zum angeklickten Element angezeigt werden.

Dazu gehört u. a. eine Liste mit denjenigen Schülerinnen und Schülern, die die entsprechende Umformung ausgeführt haben; der gesamte Rechenweg der Aufgabe dieser Schülerin oder dieses Schülers kann dann abgerufen werden.

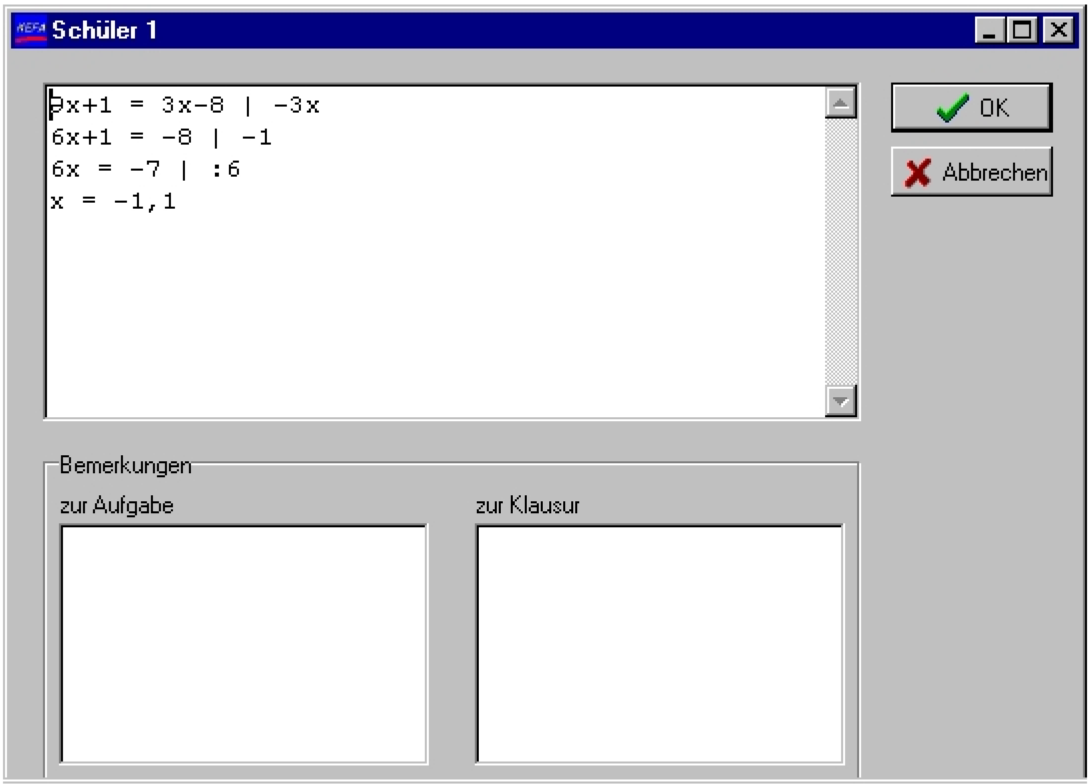


Abbildung 61: Darstellung des Rechenweges beim ausgewählten Schüler

Prolog-Auswertung

In der Prolog-Auswertung findet für die ausgewählten Schülerinnen und Schüler bzw. Klassen die eigentliche Auswertung statt.

Die Daten werden an Prolog übergeben und danach die Ergebnisse vom System in eine Datenbankstruktur übernommen. Je nach Prologregelwerk und der Art der Analyse kann es sinnvoll sein, auch in dieser Maske (analog zu oben) Baumoperationen durchzuführen.

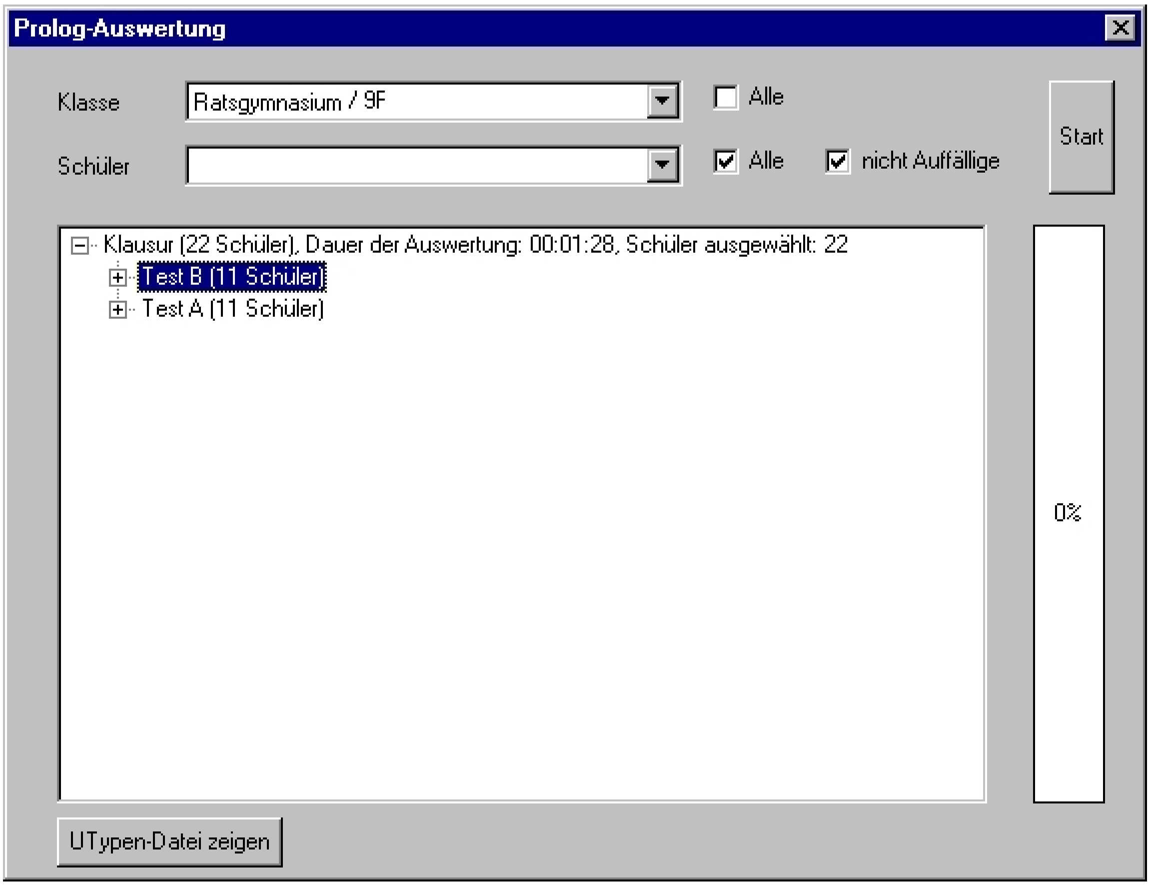


Abbildung 62: Prolog-Auswertung

Die von Delphi dabei erstellte Datenbank (UTypen-Datei) kann angezeigt werden.

Diese wird automatisch im dBase-Format gespeichert und steht dann zu statistischen Auswertungen zur Verfügung.

UTypen

TEST	AUFGNR	ZEILENNR	INVZEILE	AUFGTEXT	INSGES_R	OP	OP_IN	NICHTBEARB	KORRIGIERT
A	1	1	4	-8x-5=-7x-7	Wahr	+7x		Falsch	Falsch
A	1	2	3	-1x-5=-7	Wahr	+5	[add, [(7,1)]]	Falsch	Falsch
A	1	3	2	-1x=-2	Wahr	*(-1)	[add, [(5,0)]]	Falsch	Falsch
A	1	4	1	x=2	Wahr		[mul, [(-1,0)]]	Falsch	Falsch
A	2	1	3	-2x-6=-3x+8	Wahr	+3x		Falsch	Falsch
A	2	2	2	1x-6=+8	Wahr	+6	[add, [(3,1)]]	Falsch	Falsch
A	2	3	1	x=14	Wahr		[add, [(6,0)]]	Falsch	Falsch
A	3	1	4	5x-4=-9x-6	Wahr	+9x		Falsch	Falsch
A	3	2	3	14x-4=-6	Wahr	+4	[add, [(9,1)]]	Falsch	Falsch
A	3	3	2	14x=-2	Wahr	:14	[add, [(4,0)]]	Falsch	Falsch
A	3	4	1	x=-0,14	Wahr		[mul, [(0.071429,0)]]	Falsch	Falsch
A	4	1	5	6x+7=8x+5	Wahr	-8x		Falsch	Falsch
A	4	2	4	-2x+7=+5	Wahr	-7	[add, [(-8,1)]]	Falsch	Falsch
A	4	3	3	-2x=-2	Wahr	*(-1)	[add, [(-7,0)]]	Falsch	Falsch
A	4	4	2	2x=2	Wahr	:2	[mul, [(-1,0)]]	Falsch	Falsch
A	4	5	1	x=1	Wahr		[mul, [(0.5,0)]]	Falsch	Falsch
A	5	1	5	-7x-4=2x-8	Wahr	-2x		Falsch	Falsch
A	5	2	4	-9x-4=-8	Wahr	+4	[add, [(-2,1)]]	Falsch	Falsch
A	5	3	3	-9x=-4	Wahr	*(-1)	[add, [(4,0)]]	Falsch	Falsch
A	5	4	2	9x=4	Wahr	:4	[mul, [(-1,0)]]	Falsch	Falsch
A	5	5	1	x=0,44	Wahr		[mul, [(0.25,0)]]	Falsch	Falsch

Abbildung 63: Utypen (Teil1)

UTypen

SCH_DAUER	AT1	AT2	AT3	AT4	AT5	AT6	AT7	AT8	AT9	AT10
30	-1	22	-1	-1	182182	182182	-1	-1	21288	21288
30	-1	22	-1	-1	152182	903182	-1	-1	21268	2208
30	-1	22	-1	-1	152903	903182	-1	-1	1260	2208
30	-1	11	-1	-1	161903	903181	-1	-1	1180	2108
30	-1	11	-1	-1	182182	182181	-1	-1	21288	21288
30	-1	11	-1	-1	151182	903181	-1	-1	21158	2108
30	-1	11	-1	-1	161903	903181	-1	-1	1180	2108
30	-1	12	-1	-1	181182	182182	-1	-1	21188	21288
30	-1	12	-1	-1	181182	903182	-1	-1	21188	2208
30	-1	12	-1	-1	181903	903182	-1	-1	1180	2208
30	-1	12	-1	-1	161903	903112	-1	-1	1180	2201
30	-1	22	-1	-1	181181	181181	-1	-1	21188	21188
30	-1	22	-1	-1	182181	903181	-1	-1	21288	2108
30	-1	22	-1	-1	182903	903182	-1	-1	1280	2208
30	-1	11	-1	-1	181903	903181	-1	-1	1180	2108
30	-1	11	-1	-1	161903	903181	-1	-1	1180	2108
30	-1	22	-1	-1	182182	181182	-1	-1	21288	21188
30	-1	22	-1	-1	182182	903182	-1	-1	21288	2208
30	-1	22	-1	-1	182903	903182	-1	-1	1280	2208
30	-1	11	-1	-1	181903	903181	-1	-1	1180	2108
30	-1	11	-1	-1	161903	903111	-1	-1	1180	2101

Abbildung 64: Utypen (Teil 2)

Programminfo

Abbildung 65: Programminfo mit Versions- und Pfadangabe

5.2. Anforderungen an die Programmierung

In diesem Teilkapitel wird kurz auf technische Details und inhaltliche Anforderungen der Programmierung von KEFA und dem dazu gehörenden Prologregelwerk eingegangen.

Aufgrund der äußeren Anforderungen[121] und der zu erstellenden Datenbankstruktur[122] fiel die Wahl für das Entwicklungssystem auf Delphi 3.

Für die Analyse der Rechenschritte schien es allerdings nicht sinnvoll, entsprechenden Code unter Delphi zu programmieren. Stattdessen bot sich vielmehr die Anbindung einer regelbasierten Sprache wie Prolog an. Unter den verschiedenen Prologdialekten wählten wir das von Jan Wielemaker vom *Sociaal Wetenschappelijke Informatica Department of Social Science Informatics* der

[121] Das System sollte unter Windows95 / NT laufen, komfortabel zu bedienen sein, bezüglich der Verarbeitungszeit auch auf PCs mit 75 MHz und 32 MB Ram noch möglichst schnell sein.
[122] Delphi 3 stellt eine Datenbankoberfläche zur Verfügung und besitzt als Standard das Paradoxformat, was weitgehende Kompatibilität zu anderen Formaten und Systemen gewährleistet.

Universiteit van Amsterdam (SWI)[123] entwickelte SWI-Prolog[124], da es für Forschungseinrichtungen zur freien Benutzung zur Verfügung steht.[125]

Die Datenbanken, die extern statistisch weiterverarbeitet werden sollten, wurden aus Gründen der Kompatibilität im dBase-Format erstellt.

Als Prolog-Interface wurde im Wesentlichen das bei SWI-Prolog mitgelieferte C-Programm und von Martin Hennecke (Hildesheim)[126] an Delphi angepasste Programm SWI_Prolog.h verwendet. Bevor mittels der High-Level-Routine CallProlog allerdings die Prologmaschine aufgerufen werden konnte, mussten spezifische Übersetzungen der Daten für Prolog vorgenommen werden.[127]

Unabhängig von der Darstellung der Daten (Rechenwege) in Delphi war es notwendig, diese für Prolog aufzuarbeiten[128].

Da es aus mathematikdidaktischer Sicht wichtig war, z. B. Brüche von Dezimalbrüchen unabhängig ihres eventuell identischen Werts zu unterscheiden oder Gleichungen nicht automatisch auszuwerten, sondern als zu untersuchende Objekte wohl zu unterscheiden, waren sowohl auf Delphi-Seite als auch auf Prolog-Seite umfangreiche Prozeduren und Deklarationen notwendig.

Aus Untersuchungssicht war es wesentlich, die Darstellung der Zahlen (Bruch, Dezimalbruch, perodische Zahl, gemischter Bruch) und Terme (Reihenfolge, Stellung der Klammern usw.) und insbesondere die Notation der Operationshinweise korrekt an Prolog zu übergeben.

Dies bedeutete verschiedene Termdarstellungen von Gleichungen und Operationshinweisen, die von Delphi erzeugt wurden:

[123] siehe http://www.swi.psy.uva.nl/projects/SWI-Prolog/

[124] SWI-Prolog ist schnell kompilierbar, robust, benötigt wenig Speicherplatz, umfasst den Edinburgh-Standard und enthält die meisten Spezifikationen des ISO-Standards und von Quintus- und SicstusProlog. Ferner besitzt SWI-Prolog ein C / C++-Interface mit der Möglichkeit der Einbettung des SWI-Prolog-Kernels in C / C++-Projekte.

[125] Ein weiterer Vorteil von SWI-Prolog ist, dass es unter verschiedenen Betriebssystemen lauffähig ist und aufgrund dieser Systemunabhängigkeit eine zukünftige Portierbarkeit erleichtert wird.

[126] An dieser Stelle möchte ich mich nochmals ausführlich bei Martin Hennecke bedanken, der entscheidende Impulse zur Prologimplementierung leistete.

[127] Im Folgenden möchte ich auf das Auflisten von Sourcecode verzichten und nur die Teile, die das Umsetzen der mathematikdidaktischen Fragestellungen prototypisch zeigen, wie das Regelsystem also „funktioniert“, darlegen.

[128] Prolog kennt z. B. keine explizite Variablendeklaration für Strings oder etwa Integer-Zahlen, wie aus Pascal bekannt, sondern Terme und Atome. Als Termtypen können Variablen, Atome, Strings, Zahlen und Terme unterschieden werden. Dabei gilt die „Standardordnung“ Variables < Atoms < Strings < Numbers < Terms.

Schülernotation	Delphi	Prolog
-x-4=-3x+1	-x-4=-3x+1	[-x-4, -3*x+1]
$-1\frac{3}{8}$x-4=-3x+1	-1b3/8x-4=-3x+1	[-1 b 3/8*x-4, -3*x+1]

Tabelle 37: Beispiele für Gleichungen

Schülernotation	Delphi	Prolog
| +3x-8	+3x-8	[add, [(3,1) , (-8,0)]]
| +3x	+3x	[add, [(3,1)]]
| -8+3x	-8+3x	[add, [(-8,0) , (3,1)]]
| $\cdot\frac{1}{8}$	*1/8	[mul, [(0.125,0)]]

Tabelle 38: Beispiele für Operationshinweise

Datenbankstruktur

Folgende Abbildung gibt eine Übersicht über die Datenbankstruktur. Für eine genaue Beschreibung siehe Tandecki (1998).

KEFA Datenbankstruktur

Schulen (P7)

Nummer	+		*
Name	A	80	
Schulform	S		

Schulbuch (P7)

Nummer	+		*
Bezeichnung	A	40	

Klassen (P5)

Nummer	+		*
Erstellungsdatum	@		
Name	A	15	
NamenMemo	M	5	
Datum	D		
Schulstunde	S		
SchulNr	I		S2.1
Lehrer	A	40	
Anzahl Mädchen gesamt	S		
Anzahl Mädchen anwesend	S		
Anzahl Jungen gesamt	S		
Anzahl Jungen anwesend	S		
Anzahl Ausländer	S		
Bemerkung	M	5	
SchulbuchNr	I		S1.1
Einführung nach Lehrplan	L		
EinführungMemo	M	5	
Lehrerwechsel	L		
LehrerwechselMemo	M	5	
Kurs	S		
KursMemo	M	5	
Auffällig	L		

S1: BySchulbuch
S2: BySchule

Kommentare (P7)

Nummer	+		*
Text	A	40	S1.1

S1: ByTextUnique

Schüler (P5)

Nummer	+		*, S1.2
Name	A	40	S2.1
KlassenNr	I		S1.1
Geschlecht	S		
Auffällig	L		

S1: ByKlassenNr
S2: ByName

RWHdr (P5)

KlassenNr	I		*
SchülerNr	I		*
TestDetailNr	I		*
Nummer	+		S1.1
Dauer in Min	S		
Bemerkung	M	5	

S1: ByNummer

RWAufgHdr (P5)

RWHdrNr	I		*
AufgNr	I		*
Nummer	+		S1.1
Aufgabe nicht bearbeitet	L		
Aufgabe korrigiert	L		
Bemerkung	M	5	

S1: ByNummer

RWDetail (P4)

RWAufgHdrNr	I		*, S1.1
LfdNr	S		*, S1.2
GleichungsNr	I		
KommentarNr	I		

s1: ByRWAufgHdrNrAndLfdNrDesc

TestHdr (P5)

Nummer	+		*
Bezeichnung	A	40	S1.1
Bemerkung	M	5	

S1: ByBezeichnung

TestDetail (P7)

Nummer	+		*
TestHdrNr	I		S1.1
Differenzierung	S		S1.2

S1:ByTestHdrAndDiffUnique

Aufgaben (P5)

Nummer	+		*
TestDetailNr	I		S1.1
LfdNr	S		S1.2
GleichungsNr	I		

S1: ByTestAndLfdNr

Gleichungen (P7)

Nummer	+		*
LinksNr	I		S1.1
Mitte	A	2	S1.2
RechtsNr	I		S1.3

S1: ByLinksMitteRechts

Terme (P7)

Nummer	+		*
Text	A	20	S1.1

S1: ByText Unique

Legende:

P4/P5/P7	Tabellentyp (Paradox 4/5/7)
*	Primärer bzw. eindeutiger Index
Sp: xxx	Sekundärindex p, aufsteigend, Bezeichnung xxx
Sp.q	Sekundärindex p, q-tes Feld
sp	Sekundärindex p, absteigend, Bezeichnung xxx
sp.q	Sekundärindex p, q-tes Feld
Calc	Berechnetes Feld
Lookup	Aus anderer Tabelle importiertes Feld

Feldtypen:

+	Autoinkrement
A	Alphanumerisch (mit Längenangabe)
S	Short Integer
@	Datum/Zeit
M	Memo
D	Datum
L	Logisch (Boolean)
I	Integer

5.3. Anforderungen an Prolog

In diesem Teilkapitel werden die inhaltlichen Anforderungen an das mit Prolog zu erstellende Regelwerk beschrieben. Besonderer Wert wird auf die Möglichkeit der Hypothesenbildung gelegt.

Prolog als deklarative Programmiersprache[129] bietet für die untersuchte Fragestellung eine Vielzahl an Vorteilen: die zu bildende Wissensbasis aus Fakten und Regeln (Klauseln) ist vergleichsweise einfach zu deklarieren und die Anfragen an das System werden schnell beantwortet; dazu gehören die Lösungssuche im Sinne einer Tiefensuche („depth-first“) und das Backtracking[130].

Allerdings sind umfangreiche Prädikate und Regeln notwendig, um die verschiedenen Terme, Atome und Listen für die mathematischen Objekte Gleichungen, Gleichungsseiten, Operationshinweisen, Operationen usw. zu spezifizieren.

Die dazu gehörenden Prologdateien sind:

- IF.PL,
- POLYNOM.PL,
- ANALYSE.PL,
- ATYPEN.PL,
- UTYPEN.PL.

In IF.PL werden nützliche Prozeduren für das eigentliche Regelwerk zur Verfügung gestellt. Dazu gehören insbesondere Klauseln, die den Umgang mit Listen vereinfachen.

In POLYNOM.PL sind die Regeln implementiert, die mit Polynomen und Teilen von Polynomen (also Termen im mathematischen und nicht nur im Prologsinne) arbeiten und für die Analyse notwendig sind.

In ANALYSE.PL sind die Regeln implementiert, die das eigentliche Herzstück für die Analyse der von den Schülerinnen und Schülern gemachten Umformungen darstellen. An dieser Stelle fließen Hypothesen (in diesem Stadium aus Expertensicht) in das Regelwerk ein. Deshalb sollen diese Hypothesen im Vorfeld ausführlich dargelegt werden.

[129] im Gegensatz zu prozeduralen Programmiersprachen wie Pascal und Basic oder objektorientierten Programmiersprachen.

[130] Mit dem Backtracking können nicht nur eine, sondern alle Lösungen einer Anfrage ermittelt werden. Für die Erstellung der Atypen und der Utypen habe ich mich allerdings aus auswertungstechnischen Gründen auf eine Lösung beschränkt, die durch die Reihenfolge der Regeln vorgegeben war. Die Entwicklung ist in diesem Stadium rein explorativ. Gerade die Möglichkeit der Ermittlung aller (oder zumindest einiger) Lösungen und deren entsprechenden Bewertung (aus empirischer Sicht oder aus Expertensicht im Sinne einer Bestensuche) wäre z. B. die Grundlage eines adaptiven diagnostischen Systems in diesem Bereich.

In ATYPEN.PL sind die Regeln für die Klassifikation des Aufgabentyps einer Gleichung definiert.
In UTYPEN.PL sind die Regeln deklariert, die die Klassifikation der einzelnen Umformungsschritte vornehmen und eine entsprechende Liste an Delphi zurückliefern.

Hypothesenbildung

Ziel des Regelwerkes ist es, die von Schülerinnen und Schülern gemachten Umformungen so genau wie möglich zu analysieren. Im Sinne von Hoppe muss dabei zuerst eine Feinanalyse erfolgen. Danach können Fehlerkategorien aufgrund von theoretischen und empirischen Ergebnissen zusammengefasst werden.

Das Regelwerk soll aber nicht nur die Fehler klassifizieren und analysieren, die die Schülerinnen und Schüler machen, sondern auch die Strategien, die verwendet werden, um lineare Gleichungen abhängig von der konkreten Aufgabenkonstruktion zu lösen.

Das bedeutet einerseits, dass alle von den Schülerinnen und Schülern gemachten Notationen erkannt werden müssen und dieses Erkennen mit möglichst wenig Interpretation im Sinne von Fakten geschehen muss, sowie andererseits eine möglichst vielfältige Hypothesenbildung für das, was die Schülerinnen und Schüler intendiert haben.

Da zur Grundlage dieser Analyse nur das schriftliche Material, die Tests, zur Verfügung stehen und keine Daten darüber vorliegen, was die einzelne Schülerin, der einzelne Schüler gedacht haben, kann sich die Hypothesengenerierung nur an den vorhandenen empirischen Daten orientieren.

Die Fehlermustertypisierungen von Cortes (1993), Tietze (1988), Davis/Cooney (1978), insbesondere die Untersuchungen von Lörcher (1987) und Roser (1991) und die Überlegungen von Malle (1993), Vollrath (1994) und Lörcher (1995a) bilden, wie bereits geschildert, hierfür die Grundlage.

Ziel der Analyse ist es in diesem Entwicklungsstadium ein möglichst weitgefächertes Angebot an Deutungsmustern zu liefern.

Im weiteren sollen die Daten aus der Untersuchung allerdings so weit wie möglich mit traditionellen Methoden (etwa unter Zuhilfenahme von SPSS) ausgewertet werden, um für die Zukunft eine empirische Basis für die Analyse und die Fortentwicklung zu erhalten.

Mein Modell besitzt einige Einschränkungen, die im Folgenden ausführlich dargelegt werden sollen.

Eine Umformung besteht aus zwei Zeilen[131], wobei die erste Zeile einen Umformungshinweis enthalten kann, aber nicht muss.
Nicht berücksichtigt wird die Stellung dieser Umformung in dem konkreten Lösungsprozess einer Aufgabe. Die gleiche Umformung kann z. B. in der ersten Zeile beginnen oder auch erst nach zwei Umformungen auftreten[132].

Weiterhin wird bei der Analyse nicht beachtet, ob und wieviel Umformungen oder Aufgaben bereits bearbeitet wurden. Klasseneffekte, Schülereffekte usw. werden ebenfalls nicht berücksichtigt.

Um diese Beschränkungen auszugleichen, werden diese und weitere Daten, wie bereits beschrieben, in die von KEFA bei der Auswertung erstellte Datei aufgenommen und können bei der weiteren Bearbeitung mittels SPSS ausgewertet werden.

Als wichtige Information für die von Schülerinnen und Schülern intendierte Umformung dient üblicherweise der notierte Umformungshinweis.

Eine Umformung zerfällt idealerweise

- in eine erste linke Seite (LS1),
- in eine erste rechte Seite (RS1),
- in einen Umformungshinweis (Op),
- in eine zweite linke Seite (LS2) und
- in eine zweite rechte Seite (RS2).

Diese Umformung kann richtig oder falsch sein.

Beispiel 1:

Schülerlösung einer Aufgabe:

$$\begin{aligned} -8x - 5 &= -7x - 7 && | +7x \\ -1x - 5 &= -7 && | +5 \\ -1x &= -2 && | \cdot(-1) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

1. Umformung:

$$-8x - 5 = -7x - 7 \quad | +7x \Rightarrow^{133} -1x - 5 = \quad -7$$

[131] Dies bedeutet, dass Umformungen, die in einer Zeile durchgeführt werden (Bsp.: 3x + 1 = 4 + 2 = 6) nicht analysiert werden.
[132] In Test A lautet Aufgabe 2: –6x = 9 und Aufgabe 3: 3x – 8 = 9x + 1.
Die Umformung -6x = 9 | : (-6) => x = -1,5 kann somit bei Aufgabe 2 in der ersten Zeile beginnen (die erste Umformung sein) und bei Aufgabe 3 z. B. in der dritten Zeile beginnen (die dritte Umformung sein).
[133] Für die Darstellung von Äquivalenzumformungen von Gleichungen wird ab jetzt nicht die Schülernotation (mit Untereinanderschreiben) benutzt. Stattdessen verwende ich das Zeichen

2. Umformung:

$$-1x - 5 = -7 \quad | +5 \;\Rightarrow\; -1x = -2$$

3. Umformung:

$$-1x = -2 \quad | \cdot(-1) \;\Rightarrow\; x = 2$$

Alle drei Umformungen sind richtig und alle Umformungshinweise sind ebenfalls korrekt.

Beispiel 2:
Schülerlösung einer Aufgabe:

$$\begin{aligned} -7x - 4 &= 2x - 8 && | -2 \\ -9x - 4 &= -8 && | -4 \\ -9x &= -12 && | \cdot(-1) \\ 9x &= 12 && | :9 \\ x &= 0,\overline{33} \end{aligned}$$

1. Umformung:

$$-7x - 4 = 2x - 8 \quad | -2 \;\Rightarrow\; -9x - 4 = -8$$

2. Umformung:

$$-9x - 4 = -8 \quad | -4 \;\Rightarrow\; -9x = -12$$

3. Umformung:

$$-9x = -12 \quad | \cdot(-1) \;\Rightarrow\; 9x = 12$$

4. Umformung:

$$9x = 12 \quad | :9 \;\Rightarrow\; x = 0,\overline{33}$$

Die erste Umformung ist richtig, aber der Umformungshinweis ist falsch, es wurde nicht auf beiden Seiten 2 subtrahiert sondern 2x. Die zweite Umformung ist falsch, die dritte Umformung richtig jeweils mit korrektem Umformungshinweis und die vierte Umformung ist wieder falsch.

Welche Umformungsstrategie wurde verwendet?

In der 1. Umformung des Beispiels 1 wurde der x-Term -7x im Sinne der Elementarumformungsregeln nach Malle „von rechts nach links gebracht".

Falls sich bestätigt, dass Schülerinnen und Schüler insbesondere bei Divisionen durch negative Zahlen im (idealtypischen) letzten Umformungsschritt große

$\Rightarrow$ (nicht das korrekte Zeichen $\Leftrightarrow$), um damit die Umformungsrichtung anzudeuten. Diese Schreibweise wird im Folgenden auch bei den Auswertungen verwendet.

Schwierigkeiten haben, ist diese Umformung als ungünstig zu betrachten[134], da in der zweiten Zeile der x-Term –1x einen negativen Koeffizienten besitzt.

Günstiger wäre in diesem Sinne die Umformung +8x, da damit eventuell Fehler im Zusammenhang mit dem Minuszeichen vermieden werden könnten.

Andererseits entspricht diese Umformung einer Standardstrategie beim Lösen von Gleichungen („erst alles mit x nach links, dann alles ohne x nach rechts, dann durch Zahl vor x teilen“[135]).

Welche Gleichungsform lag vor, welche wurde erzeugt?

In beiden Beispielen ist die erste Gleichung eine Form Ax + B = Cx + D[136] mit ganzzahligen Koeffizienten A, B, C und D.

Im ersten Beispiel sind A, B, C und D kleiner als 0, also negativ, im zweiten Beispiel C größer als 0, also positiv. Alle Gleichungsseiten sind in der „Normalreihenfolge“ Ax + B angeordnet.

Im zweiten Beispiel ist die fünfte und letzte Gleichung von der Form x = D. D ist eine periodische Zahl größer als 0.

Welche Umformungshinweise wurden notiert?

Im ersten Beispiel bei den ersten beiden Umformungen handelt es sich um additive und bei der letzten Umformung um einen multiplikativen Hinweis.

Bei der letzten Umformung im zweiten Beispiel ist eine Division durch eine ganze (positive) Zahl vermerkt.

Welcher Fehler wurde gemacht? Oder besser: Welche Beschreibung kann den Fehler genügend genau charakterisieren?

Bei der zweiten Umformung im zweiten Beispiel soll -4 von links nach rechts gebracht werden. Statt 4 zu addieren wird 4 subtrahiert. Dementsprechend wird der Umformungshinweis -4 gemacht und auf der rechten Seite -8 – 4 = -12 korrekt berechnet.

[134] Inwieweit Schülerinnen und Schüler über solch ein Metawissen verfügen, sie also wissen, wie fehleranfällige Gleichungsformen und Umformungsschritte vermieden werden können, kann hier sicherlich nicht erkannt werden. Eine solche Fragestellung wäre nur mit qualitativen Einzelfallstudien zu untersuchen.

[135] Solche Formulierungen sind im Zusammenhang mit dem Lösen von Gleichungen bei Lehrerinnen und Lehrern vielfach zu hören. Die Leserin oder der Leser kennt sicherlich ähnliche Äußerungen.

[136] Ab jetzt werden in Gleichungen und Termen Großbuchstaben (A, B, C, D) verwendet. Dies entspricht der Notation in Prolog, das Großbuchstaben für Variablen verlangt.

Denkbar wäre aber auch: -4 soll von links nach rechts gebracht werden. Das Minuszeichen oder die vielen Minuszeichen erzeugen eine Störung. Statt -(-4) zu notieren, wird nur -4 beim Umformungshinweis notiert und -8 – (-4) = -12 falsch im Kopf berechnet.

Weitere Interpretationen sind denkbar:
Äquivalenzumformung bedeutet für die Schülerin oder den Schüler „auf einer Seite addieren, auf der anderen subtrahieren“.
Die Schülerin oder der Schüler hat Schwierigkeiten im Umgang mit negativen Zahlen; dies kann das Rechnen mit negativen Zahlen betreffen.
Die Schülerin oder der Schüler hat Schwierigkeiten im Umgang mit dem Minuszeichen und den verschiedenen Bedeutungen des Minuszeichens[137].

Zusätzlich dazu ist Folgendes möglich:
Die Schülerin oder der Schüler hat einen systematischen Fehler gemacht.
Die Schülerin oder der Schüler hat einen Flüchtigkeitsfehler gemacht.

Was kann und soll das Regelwerk erkennen?

Eine Umformung hat die folgende Form:

$$\begin{aligned} LS1 &= RS1 \qquad | \, Op \\ LS2 &= RS2 \end{aligned}$$

Wenn diese Umformung falsch ist, was kann die Schülerin oder der Schüler „gesehen“ haben, so dass dieser Fehler passierte; wie kann man den Fehler beschreiben?

Zur Darstellung dieser Situation wird im Folgenden die Schreibweise „LS $\circ$ Op“ verwendet. „LS $\circ$ Op“ bedeutet „auf die linke Seite wird die Umformung angewendet“.

Vorausgesetzt der Umformungshinweis wurde gemacht, dann sind folgende Fehler denkbar.

(1) $LS1 \circ Op \neq LS2$ und $RS1 \circ Op = RS2$.
(2) $LS1 \circ Op = LS2$ und $RS1 \circ Op \neq RS2$.
(3) $LS1 \circ Op \neq LS2$ und $RS1 \circ Op \neq RS2$.

Gleichzeitig kann auch eine Seitenvertauschung eine Rolle spielen:

(4) $LS1 \circ Op \neq RS2$ und $RS1 \circ Op = LS2$.
(5) $LS1 \circ Op = RS2$ und $RS1 \circ Op \neq LS2$.
(6) $LS1 \circ Op \neq RS2$ und $RS1 \circ Op \neq LS2$.

---

[137] Die Bedeutung der Subtraktion als Umkehrung der Addition, die Bedeutung als Vorzeichen und die Bedeutung der Inversenbildung.

Beispiele:

zu (1):	$-9x - 4 = -8$	$\mid -4 \Rightarrow$	$-9x = -12$
	$-9x - 4 - 4 \neq -9x$	und	$-8 - 4 = -12$
zu (2):	$-9x - 4 = -8$	$\mid +4 \Rightarrow$	$-9x = -12$
	$-9x - 4 + 4 = -9x$	und	$-8 + 4 \neq -12$
zu (3):	$-9x - 4 = -8$	$\mid -4 \Rightarrow$	$-9x = -4$
	$-9x - 4 - 4 \neq -9x$	und	$-8 - 4 \neq -4$
zu (4):	$-9x - 4 = -8$	$\mid -4 \Rightarrow$	$-12 = -9x$
	$-9x - 4 - 4 \neq -9x$	und	$-8 - 4 = -12$
zu (5):	$-9x - 4 = -8$	$\mid +4 \Rightarrow$	$-12 = -9x$
	$-9x - 4 + 4 = -9x$	und	$-8 + 4 \neq -12$
zu (6):	$-9x - 4 = -8$	$\mid -4 \Rightarrow$	$-12 = -9x$
	$-9x - 4 - 4 \neq -9x$	und	$-8 - 4 \neq -4$

Um den Ort des Fehlers genau zu lokalisieren, kann man an den Ungleichungen (wo „≠“ notiert wurde) Vermutungen anstellen, welcher Teil wie geändert werden müßte, so dass aus dieser Ungleichung eine Gleichung wird.

Man könnte dies so formulieren: „Was hat die Schülerin, der Schüler gesehen, so dass eine Gleichheit vorliegt?“.

Im ersten Fall könnte dies bedeuten:
Die Umformung (Op: -4) ist richtig, die neue linke Seite (LS2: -9x) ist richtig, die ursprüngliche linke Seite (LS1: -9x – 4) wurde „falsch gesehen“; stattdessen wurde die geänderte linke Seite (NLS1: -9x + 4) „gesehen“. Mit dieser neuen linken Seite (NLS1) wäre die Lösung korrekt.

Eine zweite Sichtweise wäre:
LS1 und LS2 werden „richtig gesehen“. Stattdessen wird Op falsch gesehen, statt -4 würde +4 eine Gleichheit ergeben. Dies könnte man z. B. als Fehler im Zusammenhang mit den oben beschriebenen falschen Äquivalenzumformungskonzept deuten.

Eine dritte Sichtweise wäre:
LS1 und Op werden „richtig gesehen“. Stattdessen wird LS2 falsch ermittelt. Dies entspräche einem Fehler bei der arithmetischen Berechnung im Kopf[138].

[138] vgl. hierzu die Ausführungen von Malle zu den Elementarumformungen. Bedauerlicherweise notieren die Schülerinnen und Schüler fast nie einen Zwischenschritt der Art

Bevor ich mit meiner Modellierung fortfahre, möchte ich ganz deutlich sagen, dass solch eine Lokalisierung des Fehlers nichts damit zu tun hat, was im Kopf der einzelnen Schülerin, des einzelnen Schülers tatsächlich vorgegangen ist und diese Modellierung nicht kognitionstheoretisch begründet ist, sondern lediglich einer Typisierung von innermathematischen Fehlermustern entspricht.

Nichtsdestotrotz ist eine Interpretation mit kognitionstheoretischen Methoden möglich, wird aber von mir an dieser Stelle nicht angestrebt; insbesondere da ich davon ausgehe, dass mein erhobenes Material dazu nicht ausreicht und die Untersuchung explorativ angelegt war.

Mein Ansatz, zu ermitteln, was kann die Schülerin, der Schüler gemeint oder gesehen haben, so dass das, was die Schülerin, der Schüler tatsächlich getan hat, sinnvoll und richtig ist, unterscheidet sich sicherlich auf den ersten Blick von der Vorgehensweise bei Teilen der heutigen Untersuchungen zur Fehleranalyse, insbesondere der Untersuchungen im Zusammenhang mit Teilleistungsschwächen, ist so neu aber nicht, da alle Ansätze bei Fehleranalysen immer davon ausgehen, dass die Fehler der Schülerinnen und Schüler „*meistens auf systematischen Regeln bzw. Fehlstrategien, die gewöhnlich (...) einen sensiblen und individuellen Ursprung haben*" (Radatz 1980, S. 29) beruhen; man das, was Schülerinnen und Schüler tun, ernst nehmen soll und dieses absichtsvoll ist.

Wie an obigem Beispiel zu sehen ist, ist ohne weitere Informationen nicht zu entscheiden, an welcher Stelle der Fehler lokalisiert werden kann..

Wenn man allerdings Plausibilitätsbetrachtungen miteinfließen lässt, könnte man eine solche Entscheidung treffen. Das bedeutet, dass eine Bewertung der verschiedenen Möglichkeiten getroffen werden muss.
Diese Bewertung kann aus Expertensicht vorgenommen werden[139] oder aufgrund von Wahrscheinlichkeiten durchgeführt werden. So könnten empirische Daten Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Hypothesen liefern; diese könnten mit qualitativen Methoden[140] oder mittels umfangreicher quantitativer Untersuchungen[141] ermittelt werden.

Plausibilitätsbetrachtungen möchte ich an folgendem Beispiel weiter verdeutlichen:

$$5x = -9x - 2 \quad | -5 \;\Rightarrow\; \quad x = -9x - 7$$

1. Erklärung:

$-9x - 4 = -8 \mid -4 \Rightarrow -9x - 4 + 4 = -8 - 4 \Rightarrow -9x = -12$. Dies würde eine genauere Lokalisierung des Fehlers erlauben.

[139] Auf diese Weise wäre vielleicht die dritte Sichtweise die Plausibelste.

[140] Dabei treten allerdings Probleme bzgl. Validität und Reliabilität auf.

[141] Hierbei ist jedoch zu prüfen, inwieweit solche Untersuchungen überhaupt dazu in der Lage sind.

Der Umformungshinweis Op „=“ Addition mit -5 wird nicht für beide Seiten der Ursprungsgleichung „richtig gesehen“.
Lediglich der Zahlenwert 5 ist für die Umformung aufgeteilt als Teilumformung auf den jeweiligen Seiten identisch.
Die linken Seiten und rechten Seiten werden „richtig gesehen“.
Damit zerfällt die Umformung in eine linke Umformung Op_links und in eine rechte Seite Op_rechts mit Op_links „=“ Division durch 5 und Op_rechts „=“ Addition von 5.

2. Erklärung:
Der Umformungshinweis Op „=“ Addition von -5 wird „richtig gesehen“; RS1, LS2, RS2 werden „richtig gesehen“. LS1: 5x wird als 5 + x angesehen[142].

3. Erklärung:
Der Fehler ist kein einfacher Fehler, sondern lässt sich an zwei Stellen lokalisieren: Op und RS1.
Der Zahlenwert -5 beim Umformungshinweis ist für beide Teilumformungen identisch; links wird er allerdings als –5x interpretiert. Bei der Ermittlung von LS2 wird 5x – 5x allerdings zu x[143].

Alle drei Erklärungen sind sicherlich plausibel, wobei die beiden ersten den Vorteil haben, dass der Fehler an einer Stelle lokalisiert wird.

Die Ermittlung von verschiedenen Lösungen ist unter Prolog mit dem Verfahren des Backtracking vergleichsweise leicht möglich; eine Entscheidung ohne vorhandene Absicherung kann ein Expertensystem allerdings nicht leisten. In der weiteren Entwicklung des Regelwerks ist es durchaus denkbar, das System „lernfähig“ zu konstruieren[144].

Um mögliche Kandidaten, für das, was die Schülerin, der Schüler „gesehen“ haben kann, zu ermitteln, sind eine Reihe an Abfragen nötig, die im Wesentlichen mit den Regeln aus der Prologdatei ANALYSE.PL zur Verfügung gestellt werden.

Diese werden in den folgenden Abschnitten entsprechend beschrieben.

5.4. Regelwerk

Im Folgenden sollen die wichtigsten Regeln der Prologdateien kurz vorgestellt werden. Danach soll ein Überblick über die für den Nutzer wichtigen Werte der an Delphi zurückgelieferten Listen für den Aufgabentyp und die Umformung gegeben werden. Diese Listen werden in die Datenbank übernommen und stehen dann statistischen und weiteren Auswertungen zur Verfügung.

142 vgl. Konkatenationsfehler
143 Dies kann mit einem Fehler beim Einsundeins (Zählfehler) (vgl. Gerster 1982, S. 28 und Lorenz/Radatz 1993, S. 60) oder mit einem Fehler im Zusammenhang mit 0 und 1 oder im Zusammenhang mit 0x und 1x begründet werden.
144 Falls die Bewertung stochastisch erfolgt, könnten die zu konstruierenden stochastischen Maße bei jeder Analyse angepasst werden.

Ausdrücklich will ich noch mal daraufhinweisen, dass die Entwicklung von KEFA es einfach möglich macht, diese Listen ganz unterschiedlich (je nach Experte und gemachten Hypothesen) zu erstellen. Weder die Länge der Liste (in diesem Fall a_typ 10-stellig und u_typ 23-stellig) noch die Art der Einträge ist vorgegeben; dies ist insbesondere für eine mögliche Weiterentwicklung zu einem tutoriellen System oder zu einem adaptiven diagnostischen System wichtig.

Entscheidend bei der Entwicklung des Regelwerks war die Konstruktion eines Rechensystems, dass in der Lage ist, Gleichungen und Terme (im mathematischen Sinn) zu verknüpfen und zu unterscheiden, also eines für die gegebene Situation eingeschränkten algebraischen Systems. Dafür sind eine Vielzahl von Klauseln (Prozeduren) notwendig, die im Folgenden ausführlich beschrieben werden. Diese Prozeduren bilden somit eine Grundlage für Weiterentwicklungen.

1. Prologdatei IF.PL

In IF.PL sind einige nützliche Funktionen definiert, die es ermöglichen, einigermaßen komfortabel eigene Funktionen zu schreiben. Außerdem sind hier auch einige Typüberprüfungen implementiert.

natur(X) prüft, ob X eine natürliche Zahl, d.h. ganzzahlig und größer als Null ist. **real**(X) prüft, ob X eine reelle Zahl ist, vergleichbar mit der in SWI-Prolog standardmäßig implementierten Funktion number(X). **reell**(X) hat die gleiche Funktion wie real(X).

if(Cond, Then) definiert ein zweistelliges if-then. Wenn Cond erfüllt ist, wird Then ausgeführt. **if(Cond, Then, Else)** definiert ein dreistelliges if-then-else. Durch den Else-Zweig wird das if auf drei Stellen erweitert. Wenn Cond erfüllt ist, wird Then ausgeführt, sonst Else.

Bei **for(Laufvariable, Anf, End, Calls)** handelt es sich um eine For-Schleife, wie sie aus prozeduralen Sprachen bekannt ist. Die Schleife ruft Calls auf, solange die Laufvariable zwischen Anf und End liegt und erhöht den Wert der Laufvariablen bei jedem Durchlauf um eins.

Die Funktionen if und for sollen es auch „Prolog-Neulingen“ ermöglichen, erste Regeln zu konstruieren. Diese Funktionen entsprechen den Prozeduren in Pascal und werden in meinem Regelwerk allerdings nicht verwendet.

Wichtig sind die listenspezifischen Prozeduren, die benötigt werden. Dazu gehören die Prozeduren **n_tes**, die das n-te Element einer Liste zurückliefert; **loesche_n_tes**, die das n-te Element einer Liste löscht; **list_laenge**, die die Länge einer Liste bestimmt, **zaehl_liste**, die die Anzahl eines Elements in der Liste ermittelt; **suche_in_liste**, die ein Element in einer Liste sucht und diese Liste in zwei Listen (vor und nach dem Element) zerlegt; **add_liste**, die die Elemente der Liste summiert; **liste_negieren und liste_invertieren**, die aus Listen mit Zahlen die „negative“ Liste mit den Gegenzahlen oder die „invertierte“

Liste mit den Kehrwerten bestimmt. Ferner gibt es Regeln, die für Listen und bestimmt Terme (im Prologsinn) Rundungen vornehmen.

2. Prologdatei POLYNOM.PL

In POLYNOM.PL sind die Regeln implementiert, die mit Polynomen und Teilen von Polynomen (also Termen im mathematischen und nicht im Prologsinne) arbeiten und für die Analyse und die Klassifikation notwendig sind.

Zuallerst werden Operatoren für die Schreibweisen gemischter Bruch, periodischer Bruch und Runden deklariert.

konstante(X) überprüft, ob X eine Konstante, d.h. frei vom Faktor x ist. X kann hierbei ein Standard-Typ (wie Integer) oder auch ein zusammengesetzter Typ (X1+X2 oder X1 p X2) sein.

dezimal(D, X) liefert den Dezimalwert des zusammengesetzten Terms D, der einer Konstanten entsprechen muss.

lineare_form(Term) prüft, ob der Term ein linearer Ausdruck in der Variablen x ist. Die Regeln nform, mform, kform, sform_x und sform_k wandeln Terme (im mathematischen Sinne) in Listen um.

nform(Term, Normalform) wandelt einen in „normaler" Schreibweise vorliegenden Term Ax + B in die Normalform [(A, 1), (B, 0)] um.

mform(Term, Normalform) wandelt Terme in prologspezifische Listen um, normalisiert aber diese Liste nicht (s. Beispiel in folgender Tabelle).

kform(Term, Normalform) erzeugt eine Liste von Ziffern für den verwendeten Term: [1, 2] bedeutet, dass der Ursprungsterm aus zwei Teiltermen besteht, erst einen Term mit x und dann einer Konstanten. [1, 2, 1] bedeutet: „erst x-Term (1), dann Konstante (2), dann x-Term (1)".

Term	nform	mform	kform[145]
-x-4	[(-1, 1), (-4, 0)]	[(-1, 1), (-4, 0)]	[1, 2]
-x-4+3*x	[(2, 1), (-4, 0)]	[(-1, 1), (-4, 0), (3, 1)]	[1, 2, 1]
-4+3*x	[(3, 1), (-4, 0)]	[(-4, 0), (3, 1)]	[2, 1]
-1 p 6*x-4	[(-1.66667, 1), (-4, 0)]	[(-1.66667, 1), (-4, 0)]	[1, 2]

Tabelle 39: Termerkennung

[145] Erläuterung siehe unten

sform_x bzw. **sform_k** erzeugen Listen für die Teilterme mit x und entsprechend ohne x.

Diese Listen geben Auskunft über die Reihenfolge und den Zahlenraum, der bei diesen Linearformen verwendeten Koeffizienten.

Term	sform_x	sform_k
-x-4	[8]	[8]
-x-4+3*x	[8, 8]	[8]
-x-4+3*x+7	[8, 8]	[8, 8]
1/9+3 p 8*x+2	[4]	[2, 8]

Tabelle 40: sform_x und sform_k

Zur Bedeutung der Listenwerte siehe folgende Tabelle.

Ausprägung	Bedeutung	Beispiel
0	reelle Zahl	1,18
1	Division zweier ganzer Zahlen	2:3
2	Bruch zweier ganzer Zahlen	$\frac{2}{3}$
3	gemischter Bruch	$1\frac{2}{3}$
4	periodischer Bruch	$1,\overline{16}$
7	Null	0
8	ganze Zahl	12
9	Bruch zweier Zahlen, die nicht beide zugleich ganze Zahlen sind	$\frac{2}{3,1}$

Tabelle 41: Ausprägung für sform_x bzw. sform_k

normalform(Term, BereinigtesPolynom) entfernt im Gegensatz zu der Prozedur nform 0-Tupel.

Beispiel:
nform(1+x+2*x-3*x-19, X[146]).   X = [(0, 1), (-18, 0)]
normalform(1+x+2*x-3*x-19, X).   X = [(-18, 0)]

Die folgenden Regeln dienen der Verknüpfung von Polynomen.

addiere_polynome(Poly1, Poly2, Poly) addiert zwei Polynome und gibt das Summenpolynom zurück.

subtrahiere_polynome(Poly1, Poly2, Poly) ist das Gegenstück zu addiere_polynome. In der Funktion wird Poly2 mit –1 multipliziert und dann zu Poly1 addiert, so dass Poly das Differenzpolynom ergibt.

multipliziere_polynome(Poly1, Poly2, Poly) gibt für Poly das Produkt der Polynome Poly1 und Poly2 zurück.

loese_gleichung([LS, RS], Loesung) löst die Gleichung der Form ax+b=cx+d und gibt die Lösung zurück.
Falls keine Lösung gefunden werden konnte, gibt Prolog -99999999 zurück.
Falls die lineare Gleichung allgemein erfüllt ist, gibt Prolog 99999999 zurück [147].

loese_gleichung	Lösung	Bedeutung	Bedeutung der Lösung
[-x-4, -3*x+1]	2.5	-x – 4 = -3x + 1	2,5
[-1 b 3/8*x-4, -3*x+1]	3.07692	$-1\frac{3}{8}x - 4 = -3x + 1$	3,07692
[3*x+6, 3*x+2]	-99999999	3x + 6 = 3x + 2	keine Lösung
[3*x+6, 3*x+6]	99999999	3x + 6 = 3x + 6	allgemein-gültig

Tabelle 42: loese_gleichung

Mit **loesung_korrekt2**([L1, R1], [L2, R2]) wird geprüft, ob L2=R2 die Lösung der Gleichung L1=R1 darstellt oder die gleiche Lösung wie L1=R1 besitzt.

Wenn z.B. die Ausgangsgleichung (L1, R1) 2*x+1=3*x-7 lautet und die vom Schüler angegebene Lösung (L2, R2) x=8 ist, ist die Regel loesung_korrekt erfüllt und liefert Yes, d.h. die angegebene Lösung ist richtig.
Ein Rundungsfehler wird hierbei berücksichtigt.

[146] X steht hier als Variable. Die Anfrage nform(Term, X). wird mit X = beantwortet.
[147] Sinnvoller wäre es sicherlich hier „keine Lösung“ bzw. „allgemeingültig“ von Prolog zurückgeben zu lassen. Ich habe dennoch die Werte 99999999 und –99999999 gewählt, damit Delphi an dieser Stelle Integers verwenden kann und bei der Auswertung mit SPSS nicht zu viele Umkodierungen notwendig sind.

Beispiel: Erklärung:

loesung_korrekt2([2*x+1, 3*x-7],[x, 8]).	Yes	$2x + 1 = 3x - 7 \Leftrightarrow x = 8$
loesung_korrekt2([2*x+1, 3*x-7],[x, 8.1]).	No	$2x + 1 = 3x - 7$ und $x = 8,1$ sind nicht äquivalent.
loesung_korrekt2([2*x+1, 3*x-7],[x, 8.01]).	Yes	$2x + 1 = 3x - 7 \Leftrightarrow x = 8,01$

multi_term(Term1, Term2, Faktor) erkennt, ob Term2 durch Multiplikation mit einem Faktor aus Term1 entstanden ist. Der Faktor wird von der Funktion zurückgeliefert.

Die Terme müssen wieder in der Form [(A, 1), (B, 0)] für Ax+B vorliegen, es dürfen jedoch keine Nullterme existieren, d.h. (0, 1) oder (0, 0) sind nicht erlaubt und müssen weggelassen werden.

multi_term ist für das Rechensystem in Prolog entscheidend, damit es gelingen kann, algebraisch zu rechnen.

Beispiel:

```
multi_term( [(4,1)], [(2, 1)], X).                X = [ (0.5, 0)]
multi_term( [(4,1), (2, 0)], [(2, 1), (1,0)], X). X = [ (0.5, 0)]
multi_term( [(4,1)], [(2, 0)], X).                X = [ (0.5, -1)]
```

Term1	Term2	Faktor	Erläuterung
[(4,1)]	[(2, 1)]	[(0.5, 0)]	$4x \cdot 0,5 = 2x$
[(4,1), (2, 0)]	[(2, 1), (1,0)]	[(0.5, 0)]	$(4x + 2) \cdot 0,5 = 2x + 1$
[(4,1)]	[(2, 0)]	[(0.5, -1)]	$4x \cdot 0,5x^{-1} = 2$

Tabelle 43: multi_term

3. Prologdatei ANALYSE.PL

ANALYSE.PL stellt das Herzstück des Regelwerks dar.

Hier werden die eigentlichen Regeln zur Analyse zur Verfügung gestellt; dies betrifft insbesondere Regeln, die mehr als nur Faktenwissen repräsentieren.

Dazu gehören die Funktionen, die Ideen zu den von den Schülerinnen und Schülern gemachten Umformungen liefern. An dieser Stelle fließen Hypothesen (in diesem Stadium aus Expertensicht) in das Regelwerk ein.

Diese Funktionen sollen zweierlei erfüllen.

Erstens sollen sie auf einer deskriptiven Ebene die Umformungen, die die Schülerinnen und Schüler gemacht haben, möglichst genau erkennen.

Falls die Umformung einer Gleichung richtig ist, ist dies vergleichsweise leicht möglich.
Falls die Umformung allerdings falsch ist, sollen entsprechend der obigen Modellbeschreibung die verschiedenen Möglichkeiten der Stelle, an der der Fehler lokalisiert werden kann, erkannt werden und „das, was die Schülerin oder der Schüler gesehen hat" ermittelt werden.

Zur Verdeutlichung diene nochmals das gleiche Beispiel:

$$\begin{aligned} -9x - 4 &= -8 \qquad | -4 \\ -9x &= -12 \end{aligned}$$

Mögliche Interpretationen sind, wie bereits oben dargestellt:

1. Interpretation:
Der Fehler lässt sich an der linken Seite der Ursprungsgleichung lokalisieren.
Statt -9x – 4 wurde -9x + 4 „gesehen". Die in diesem Sinne „gesehene" Umformung lautet dann:

$$\begin{aligned} -9x + 4 &= -8 \qquad | -4 \\ -9x &= -12 \end{aligned}$$

2. Interpretation:
Der Fehler lässt sich am Umformungshinweis lokalisieren. Auf der linken Seite wird -4 durch die Umformung -4 „weggebracht", mathematisch interpretiert wird hier 4 addiert. Auf der rechten Seite wird die Umformung richtig durchgeführt, also -4 addiert.

Wenn man also im Sinne von Matz die Umformung von oben nach unten liest, die Beziehung der aufeinanderfolgenden linken Seiten und die Beziehung zwischen aufeinanderfolgende rechte Seiten betrachtet, handelt es sich um Reduktionen.

$$\begin{aligned} -9x - 4 + 4 &= -9x \\ -8 - 4 &= -12 \end{aligned}$$

Das Entscheidende ist, dass die Schülerin oder der Schüler die Beziehung zwischen den aufeinanderfolgenden Zeilen nicht beachtet hat. Dies könnte man z. B. als Fehler im Zusammenhang mit einem falschen Äquivalenzumformungskonzept deuten.

3. Interpretation:
Der Fehler lässt sich an der linken Seite der umgeformten Gleichung lokalisieren. Statt -9x – 4 – 4 = -9x – 8 wird fehlerhaft -9x – 4 – 4 = -9x ermittelt.

Dies entspräche einem Fehler bei der arithmetischen Berechnung im Kopf[148]. Die in diesem Sinne „gesehene“ Umformung lautet dann:

$$\begin{aligned} -9x - 4 &= -8 \qquad | -4 \\ -9x - 8 &= -12 \end{aligned}$$

Diese dritte Interpretation ist eine im unterrichtlichen Alltag und bei Fehleranalysen übliche Sichtweise. Hier tritt der Fehler in der Form „falsch berechnet“ auf.

An diesem Beispiel soll nochmals deutlich werden, dass mein Modell einen großen Interpretationsspielraum besitzt.

Da ein Expertensystem mehr oder weniger selbständig entscheiden soll, welche Interpretation für einen konkreten Fall zu treffen ist, wird das Regelwerk hier rein explorativen Charakter haben.

Es geht zunächst in erster Linie darum, die Funktionsfähigkeit der programmierten Routinen zu testen. Gleichzeitig sollen aber auch empirische Daten ermittelt werden, um solch ein Regelwerk weiter zu entwickeln.

Wenn im Folgenden von Kandidaten die Rede ist, bedeutet dies immer, dass es sich um Objekte (Terme, Gleichungen, Operationshinweise etc.) handelt, die durch das Regelwerk in Prolog ermittelt werden.

Dabei handelt es sich um Objekte, die eine „gewisse Nähe“ zum Orginalobjekt besitzen, also wie solche Objekte interpretiert werden können. Dies soll in Zukunft, wenn entsprechende Daten vorliegen, zur Hypothesengenerierung über das, was die Schülerinnen und Schüler „gesehen“ haben könnten, vielleicht auch, was sie gedacht haben, dienen.

Diese „Nähe“ soll unabhängig von der deskriptiven Analyse eine „vorläufige“ Expertenbasis herstellen.

Die wichtigsten Funktionen in ANALYSE.PL sind:

finde_operation,
- **finde_teil_operation**,
- **finde_neu_seite**,
- **finde_umformung_strategie**,
- **abfrage_idee_gleichungen**,
- **abfrage_idee_op** und
- **gemachte_umformung_r**.

[148] Bedauerlicherweise notieren die Schülerinnen und Schüler fast nie einen Zwischenschritt der Art $-9x - 4 = -8 \mid -4 \Rightarrow -9x - 4 + 4 = -8 - 4 \Rightarrow -9x = -12$. Dies würde eine genauere Lokalisierung des Fehlers erlauben.

Für diese Funktionen sind Hilfsprozeduren notwendig, die ermitteln, wie (aus Expertensicht) Terme (im mathematischen Sinn) und Umformungshinweise als Operationen von den Schülerinnen und Schülern interpretiert werden können („was die Schülerinnen und Schüler gesehen haben“).

Dies sind

- koeffizienten_weglassen,
- vorzeichen_weglassen,
- vorzeichen_vertauschen,
- operations_zeichen_vertauschen,
- koeffizienten_op_mul und
- koeffizienten_op_add.

koeffizienten_weglassen

koeffizienten_weglassen erzeugt eine Liste mit Kandidaten von Termen, die im Sinne des Regelwerkes eine „gewisse Nähe“ zum Orginalterm besitzen, also wie solch ein Term interpretiert werden können.

Beispiel 1:

koeffizienten_weglassen([(-3, 1), (1, 0)], X).
X = [[(1, 1), (1, 0)], [(-1, 1), (1, 0)], [(0, 1), (1, 0)], [(1, 1), (-1, 0)],
[(-1, 1), (-1, 0)], [(0, 1), (-1, 0)], [(-3, 1), (0, 0)], [(3, 1), (0, 0)]]

Term	Bedeutung	ermittelte Terme	Bedeutung
[(-3, 1), (1, 0)]	-3x + 1	[(1, 1), (1, 0)]	x + 1
		[(-1, 1), (1, 0)]	-x + 1
		[(0, 1), (1, 0)]	1
		[(1, 1), (-1, 0)]	x – 1
		[(-1, 1), (-1, 0)]	-x – 1
		[(0, 1), (-1, 0)]	-1
		[(-3, 1), (0, 0)]	-3x
		[(3, 1), (0, 0)]	3x

Tabelle 44: Erläuterung 1 zu koeffizienten_weglassen

Beispiel 2:

koeffizienten_weglassen([(-3, 1), (4, 0)], X).
X = [[(1, 1), (4, 0)], [(-1, 1), (4, 0)], [(0, 1), (4, 0)], [(1, 1), (-4, 0)],
[(-1, 1), (-4, 0)], [(0, 1), (-4, 0)], [(-3, 1), (0, 0)], [(3, 1), (0, 0)]]

Term	Bedeutung	ermittelte Terme	Bedeutung
[(-3, 1), (4, 0)]	-3x + 4	[(1, 1), (4, 0)]	x + 4
		[(-1, 1), (4, 0)]	-x + 4
		[(0, 1), (4, 0)]	4
		[(1, 1), (-4, 0)]	x – 4
		[(-1, 1), (-4, 0)]	-x – 4
		[(0, 1), (-4, 0)]	-4
		[(-3, 1), (0, 0)]	-3x
		[(3, 1), (0, 0)]	3x

Tabelle 45: Erläuterung 2 zu koeffizienten_weglassen

vorzeichen_weglassen

vorzeichen_weglassen entfernt lediglich, falls vorhanden, ein führendes Minuszeichen.

Beispiele:

vorzeichen_weglassen([(-3, 1), (1, 0)], X). X = [[(3, 1), (1, 0)]]
vorzeichen_weglassen([(5, 1)], X). X = []

Term	Bedeutung	ermittelte Terme	Bedeutung
[(-3, 1), (1, 0)]	-3x + 1	[(3, 1), (1, 0)]	3x + 1
[(5, 1)]	5x	[]	kein zusätzlicher Term

Tabelle 46: Erläuterung zu vorzeichen_weglassen

vorzeichen_vertauschen

vorzeichen_vertauschen vertauscht die Vorzeichen bei den Teiltermen.

Beispiele:

vorzeichen_vertauschen([(-3, 1), (1, 0)], X).
X = [[(-3, 1), (-1, 0)], [(3, 1), (1, 0)], [(3, 1), (-1, 0)]]

vorzeichen_vertauschen([(5, 1)], X).
X = [[(-5, 1), (0, 0)]]]

Term	Bedeutung	ermittelte Terme	Bedeutung
[(-3, 1), (1, 0)]	-3x + 1	[(-3, 1), (-1, 0)]	-3x – 1
		[(3, 1), (1, 0)]	3x + 1
		[(3, 1), (-1, 0)]	3x – 1
[(5, 1)]	5x	[(5, 1), (0, 0)]	-5x

Tabelle 47: Erläuterung zu vorzeichen_vertauschen

operations_zeichen_vertauschen

operations_zeichen_vertauschen vertauscht die Operationszeichen beim x-Term[149].

Beispiele:

operations_zeichen_vertauschen([(-3, 1), (1, 0)], X). X = [[(1, 1), (-2, 0)]]
operations_zeichen_vertauschen([(5, 1)], X). X = [[(1, 1), (5, 0)]]

Term	Bedeutung	ermittelte Terme	Bedeutung
[(-3, 1), (1, 0)]	-3x + 1	[(1, 1), (-2, 0)]	-3 + x + 1 = x – 2
[(5, 1)]	5x	[(1, 1), (5, 0)]	5 + x = x + 5

Tabelle 48: Erläuterung zu operations_zeichen_vertauschen

[149] vgl. Konkatenationsfehler

Der Grundgedanke bei den folgenden Funktionen ist, dass bei Umformungshinweisen eventuell die Operation falsch „gesehen" wird, aber der eigentliche Zahlenwert eine wichtige Information enthält.

Dementsprechend werden Kandidaten für „nahe" Operationen bestimmt.

Für ein zukünftiges Expertensystem ist dieser Bereich von großer Wichtigkeit. Da es sich hierbei allerdings noch um ein exploratives Vorgehen handelt, hierfür keine empirischen Daten vorliegen, ist die entsprechende Kandidatenbestimmung eher willkürlich.

koeffizienten_op_mul

koeffizienten_op_mul ermittelt für den Term, der beim Umformungshinweis angegeben ist, multiplikative Kandidaten, die als Operationen für die entsprechenden Seiten von den Schülerinnen und Schülern „gesehen" (verwendet) werden können. Hier werden der Kehrwert und die Gegenzahl berücksichtigt.

Beispiel:

koeffizienten_op_mul([(3, 0)], X).
X = [[mul, [(3, 0)]], [mul, [(-3, 0)]], [mul, [(0.333333, 0)]], [mul, [(-0.333333, 0)]]]

Term	Bedeutung	ermittelte Operation	Bedeutung
[(3, 0)]	3	[mul, [(3, 0)]]	· 3
		[mul, [(-3, 0)]]	· (-3)
		[mul, [(0.333333, 0)]]	: 3
		[mul, [(-0.333333, 0)]]	: (-3)

Tabelle 49: Erläuterung zu koeffizienten_op_mul

koeffizienten_op_add

koeffizienten_op_add ermittelt analog zu koeffizienten_op_mul für den Term, der beim Umformungshinweis angegeben ist, additive Kandidaten, die als Operationen für die entsprechenden Seiten von den Schülerinnen und Schülern „gesehen" (verwendet) werden können.

Da ich den additiven Umformungen ein größeres Gewicht zumesse, da bis auf die letzte Umformung im Normalfall keine Division (Multiplikation) erfolgt, ist die Anzahl der Kandidaten auch deutlich größer als bei koeffizienten_op_mul.

Beispiel:
koeffizienten_op_add([(3, 0)], X).
X = [[add, [(3, 1)]], [add, [(-3, 1)]], [add, [(0.333333, 1)]], [add, [(-0.333333, 1)]], [add, [(9, 1)]], [add, [(-9, 1)]], [add, [(3, 0)]], [add, [(-3, 0)]], [add, [(0.333333, 0)]], [add, [(-0.333333, 0)]], [add, [(9, 0)]], [add, [(-9, 0)]], [add, [(3, 1), (3, 0)]], [add, [(-3, 1), (3, 0)]], [add, [(0.333333, 1), (3, 0)]], [add, [(-0.333333, 1), (3, 0)]], [add, [(3, 1), (-3, 0)]], [add, [(-3, 1), (-3, 0)]], [add, [(0.333333, 1), (-3, 0)]], [add, [(-0.333333, 1), (-3, 0)]], [add, [(3, 1), (0.333333, 0)]], [add, [(-3, 1), (0.333333, 0)]], [add, [(0.333333, 1), (0.333333, 0)]], [add, [(-0.333333, 1), (0.333333, 0)]], [add, [(3, 1), (-0.333333, 0)]], [add, [(-3, 1), (-0.333333, 0)]], [add, [(0.333333, 1), (-0.333333, 0)]], [add, [(-0.333333, 1), (-0.333333, 0)]], [add, [(3, 1), (9, 0)]], [add, [(-3, 1), (9, 0)]], [add, [(0.333333, 1), (9, 0)]], [add, [(-0.333333, 1), (9, 0)]], [add, [(3, 1), (-9, 0)]], [add, [(-3, 1), (-9, 0)]], [add, [(0.333333, 1), (-9, 0)]], [add, [(-0.333333, 1), (-9, 0)]]]

Term	Bedeutung	ermittelte Operation	Bedeutung
[(3, 0)]	3	[add, [(3, 1)]]	+ 3x
		[add, [(-3, 1)]]	– 3x
		[add, [(0.333333, 1)]]	$+ \frac{1}{3}x$
		[add, [(-0.333333, 1)]]	$- \frac{1}{3}x$
		[add, [(9, 1)]]	+ 9x
		[add, [(-9, 1)]]	– 9x
		[add, [(3, 0)]]	+ 3
		[add, [(-3, 0)]]	– 3
		[add, [(0.333333, 0)]]	$+\frac{1}{3}$
		[add, [(-0.333333, 0)]]	$-\frac{1}{3}$
		[add, [(9, 0)]]	+ 9
		[add, [(-9, 0)]]	– 9
		[add, [(3, 1), (3, 0)]]	+ 3x + 3

Tabelle 50: Erläuterung zu koeffizienten_op_add (1. Teil)

Term	Bedeutung	ermittelte Operation	Bedeutung
[(3, 0)]	3	[add, [(-3, 1), (3, 0)]]	$-3x+3$
		[add, [(0.333333, 1), (3, 0)]]	$+\frac{1}{3}x+3$
		[add, [(-0.333333, 1), (3, 0)]]	$-\frac{1}{3}x+3$
		[add, [(3, 1), (-3, 0)]]	$+3x-3$
		[add, [(-3, 1), (-3, 0)]]	$-3x-3$
		[add, [(0.333333, 1), (-3, 0)]]	$+\frac{1}{3}x-3$
		[add, [(-0.333333, 1), (-3, 0)]]	$-\frac{1}{3}x-3$
		[add, [(3, 1), (0.333333, 0)]]	$+3x+\frac{1}{3}$
		[add, [(-3, 1), (0.333333, 0)]]	$-3x+\frac{1}{3}$
		[add, [(0.333333, 1), (0.333333, 0)]]	$+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$
		[add, [(-0.333333, 1), (0.333333, 0)]]	$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$
		[add, [(3, 1), (-0.333333, 0)]]	$+3x-\frac{1}{3}$
		[add, [(-3, 1), (-0.333333, 0)]]	$-3x-\frac{1}{3}$
		[add, [(0.333333, 1), (-0.333333, 0)]]	$+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$
		[add, [(-0.333333, 1), (-0.333333, 0)]]	$-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$
		[add, [(3, 1), (9, 0)]]	$+3x+9$
		[add, [(-3, 1), (9, 0)]]	$-3x+9$
		[add, [(0.333333, 1), (9, 0)]]	$+\frac{1}{3}x+9$
		[add, [(-0.333333, 1), (9, 0)]]	$-\frac{1}{3}x+9$
		[add, [(3, 1), (-9, 0)]]	$+3x-9$

Tabelle 51: Erläuterung zu koeffizienten_op_add (2. Teil)

Term	Bedeutung	ermittelte Operation	Bedeutung
[(3, 0)]	3	[add, [(-3, 1), (-9, 0)]]	– 3x – 9
		[add, [(0.333333, 1), (-9, 0)]]	$+ \frac{1}{3}$ x – 9
		[add, [(-0.333333, 1), (-9, 0)]]	$- \frac{1}{3}$ x – 9

Tabelle 52: Erläuterung zu koeffizienten_op_add (3. Teil)

finde_operation

finde_operation versucht, die Operation zu ermitteln, die zu einer Umformung von zwei Gleichungen gehört.

Falls die Umformung richtig ist, wird der Umformungshinweis zurückgegeben. Da es zu zwei äquivalenten Gleichungen immer mehrere richtige Umformungen gibt, ermittelt diese Funktion immer eine „einfache“ Form.

Mittels Backtracking ist es möglich, mehrere Umformungen zu ermitteln. Dies wird allerdings aus Auswertungsgründen unterbunden. Im Nachhinein stellte sich dies als weniger günstig heraus, da auf diese Art immer versucht wurde, multiplikative Umformungshinweise zu ermitteln.

Beispiele:

finde_operation([3*x-8, 9*x+1], [-6*x-8, 1], X).   X = [add, [(-9, 1)]]

finde_operation([3*x-8, 9*x+1], [6*x-8, 1], X).   X = [falsch_umgeformt]

finde_operation([5*x, -9*x-2], [x, -9*x-7], X).   X = [falsch_umgeformt]

1. Gleichung	2. Gleichung	ermittelte Operation	Bedeutung
[3*x-8, 9*x+1]	[-6*x-8, 1]	[add, [(-9, 1)]]	3x – 8 = 9x + 1 | -9 -6x – 8 = 1
[3*x-8, 9*x+1]	[6*x-8, 1]	[falsch_umgeformt]	3x – 8 = 9x + 1 6x – 8 = 1 falsch
[5*x, -9*x-2]	[x, -9*x-7]	[falsch_umgeformt]	5x = -9x – 2 x = -9x – 7 falsch

Tabelle 53: Erläuterung zu finde_operation

finde_teil_operation

finde_teil_operation versucht analog zu finde_operation, die Operation zu ermitteln, die zu einer Umformung von zwei Gleichungsseiten gehört.

Das heißt, dass hiermit im Gegensatz zu finde_operation nicht mehr die Gleichungen betrachtet werden, sondern nur die Terme der entsprechenden Gleichungsseiten.

Dies ist wichtig, wenn die eigentliche Umformung falsch ist.

An dieser Stelle war die oben beschriebene Vorgehensweise, das Backtracking auszuschalten, besonders ungünstig, da durch das Bevorzugen von multiplikativen Operationen die eigentliche Fehlerklassifikation in SPSS sehr aufwendig wurde.

Beispiele:

finde_teil_operation([3*x-8, 3*x+1], X). X = [add, [(9, 0)]]
finde_teil_operation([3*x+1, 9*x+3], X). X = [mul, [(3, 0)]]
finde_teil_operation([5*x, x], X). X = [mul, [(0.2, 0)]]
finde_teil_operation([-9*x-2, -9*x-7], X). X = [add, [(-5, 0)]]

1. Gleichungs-seite	2. Gleichungs-seite	ermittelte Teiloperation	Bedeutung
3*x-8	3*x+1	[add, [(9, 0)]]	3x – 8 + 9 = 3x + 1
3*x+1	9*x+3	[mul, [(3, 0)]]	(3x + 1) · 3 = 9x + 3
5*x	x	[mul, [(0.2, 0)]]	5x · 0,2 = x
-9*x-2	-9*x-7	[add, [(-5, 0)]]	-9x – 2 – 5 = -9x – 7

Tabelle 54: Erläuterung zu finde_teil_operation

finde_neu_seite

finde_neu_seite versucht, den Kandidaten für eine ursprüngliche Gleichungsseite zu ermitteln, der zu einer Umformung mit einem Umformungshinweis gehört. Auch hier wird das Backtracking unterbunden.

Beispiele:

finde_neu_seite([(5, 1), (0, 0)], [(1, 1), (0, 0)], add, [(-5, 0)], X).
X = [(1, 1), (5, 0)]

finde_neu_seite([(5, 1), (0, 0)], [(1, 1), (0, 0)], mul, [(-0.2, 0)], X).
X = [(-5, 1), (0, 0)]

Ausgangs- situation	„gesehene Situation“	ermittelte „neue“ 1. Gleichungsseite
5x | -5 x	x + 5 | -5 x	x + 5
5x | ·(-0,2) x	-5x | ·(-0,2) x	-5x

Tabelle 55: Erläuterung zu finde_neu_seite

finde_umformung_strategie

finde_umformung_strategie ermittelt die Umformungsstrategie mit entsprechender Kodierung.

Die Ergebnisse 8 und 9 stehen für falsche Umformungen. Diese haben sich aber bei der Sichtung der Tests als von Schülerinnen und Schülern verwandte Strategien ergeben und sind deshalb bei der Beschreibung mit aufgenommen wurden.

Numerierung	Bedeutung
0	nicht erkannt
1	„x-Term nach rechts“
2	„x-Term nach links“
3	„Konstante nach rechts“
4	„Konstante nach links“
6	Seitenvertauschung
7	Termumformung
8	„x-Terme weggelassen“
9	„Konstanten weggelassen“

Tabelle 56: Erläuterung zur Numerierung bei finde_umformungs_strategie

Beispiele:

finde_umformungs_strategie([3*x-8, 9*x+1], [3*x-9, 9*x], X).   X = 4

finde_umformungs_strategie([3*x-8, 9*x+1], [3*x, 9*x+9], X).   X = 3

finde_umformungs_strategie([3*x-8, 9*x+1], [-8, 6*x+1], X).   X = 1

finde_umformungs_strategie([3*x-8, 9*x+1], [-6*x-8, 1], X).   X = 2 finde_umformungs_strategie([3*x-8, 9*x+1], [9*x+1, 3*x-8], X). X = 6

finde_umformungs_strategie([3*x-8+1, 9*x+1], [3*x-7, 9*x+1], X). X = 7

finde_umformungs_strategie([3*x-8, 9*x+1], [3*x, 9*x], X). X = 9

finde_umformungs_strategie([3*x-8, 9*x+1], [-8, 1], X). X = 8

1. Gleichung	2. Gleichung	Bedeutung	Umformungs -strategie	Erklärung
[3*x-8, 9*x+1]	[3*x-9, 9*x]	3x – 8 = 9x + 1 3x – 9 = 9x	4	„Konstante nach links“
[3*x-8, 9*x+1]	[3*x, 9*x+9]	3x – 8 = 9x + 1 3x = 9x + 9	3	„Konstante nach rechts“
[3*x-8, 9*x+1]	[-8, 6*x+1]	3x – 8 = 9x + 1 – 8 = 6x +1	1	„x-Term nach rechts“
[3*x-8, 9*x+1]	[-6*x-8, 1]	3x – 8 = 9x + 1 -6x – 8 = 1	2	„x-Term nach links“
[3*x-8, 9*x+1]	[9*x+1, 3*x-8]	3x – 8 = 9x + 1 9x + 1 = 3x – 8	6	Seitenvertauschung
[3*x-8+1, 9*x+1]	[3*x-7, 9*x+1]	3x– 8+1 = 9x + 1 3x – 7 = 9x + 1	7	Termumformung
[3*x-8, 9*x+1]	[3*x, 9*x]	3x – 8 = 9x + 1 3x = 9x	9	„Konstanten weggelassen“
[3*x-8, 9*x+1]	[-8, 1]	3x – 8 = 9x + 1 – 8 = 1	8	„x-Terme weggelassen“

Tabelle 57: Erläuterung zu finde_umformungs_strategie

abfrage_idee_gleichungen

abfrage_idee_gleichungen versucht, Kandidaten für die Ursprungsgleichung zu ermitteln, die zu einer Umformung mit Umformungshinweis gehören.

Diese Prozedur greift auf alle vorherigen zurück und liefert jeweils einen Kandidaten für die „gesehene“ linke Gleichungsseite und die gesehene „rechte“ Gleichungsseite.

Dabei wird wieder eine entsprechende „Nähe“ berücksichtigt.

Die Rückgabe „nix“ bedeutet, dass aufgrund der vorgegeben Regeln nichts „Sinnvolles“ erkannt wird[150]. Dies geschieht aufgrund des Ausschaltens des Backtrackings.

[150] „nix“ bedeutet immer, dass keine „plausible“ Lösung mit dem Regelwerk gefunden werden konnte. Damit wurde in diesem Stadium das Backtracking abgebrochen. In Zukunft sollte hierfür

Beispiele:

abfrage_idee_gleichungen([3*x-8, 9*x+1], [-6*x-8, -1], [add, [(-9, 1)]] , X, Y).
X = [(3, 1), (-8, 0)]
Y = [(9, 1), (-1, 0)]

abfrage_idee_gleichungen([3*x, 9*x+1], [-6*x, -1], [add, [(-9, 1)]] , X, Y).
X = [(3, 1), (0, 0)]
Y = [(9, 1), (-1, 0)]

abfrage_idee_gleichungen([3*x, 9], [-6*x, 18], [mul, [(-2, 0)]] , X, Y).
X = [(3, 1), (0, 0)]
Y = [(0, 1), (-9, 0)]

Ausgangssituation	„gesehene“ linke Seite	„gesehene“ rechte Seite	„gesehende“ Situation
3x – 8 = 9x + 1 | -9x -6x – 8 = -1	[(3, 1), (-8, 0)]	[(9, 1), (-1, 0)]	3x – 8 = 9x – 1 | -9x -6x – 8 = -1
3x = 9x + 1 | -9x -6x = -1	[(3, 1), (0, 0)]	[(9, 1), (-1, 0)]	3x = 9x – 1 | -9x -6x = -1
3x = 9 | ·(-2) -6x = 18	[(3, 1), (0, 0)]	[(0, 1), (-9, 0)]	3x = -9 | ·(-2) -6x = 18

Tabelle 58: Erläuterung zu abfrage_idee_gleichungen

abfrage_idee_op

abfrage_idee_op versucht, Kandidaten für die durchgeführte Umformung zu ermitteln, die zu einer Umformung einer Seite mit gegebenen Umformungshinweis gehören.

Dabei wird der Zahlenwert des Umformungshinweises berücksichtigt, um eine gewisse „Nähe“ zum eigentlichen Umformungshinweis zu realisieren.

Unabhängig davon wird mit Op_teil die tatsächliche Operation ermittelt, die L1 in L2 überführt. Im Normalfall wird hierfür eine multiplikative Lösung ermittelt[151].

das Cut-Prädikat (s. hierzu entsprechende Literatur zum Programmieren in Prolog) verwendet werden.

[151] Bei der späteren Auswertung mittels SPSS erwies sich dies als problematisch, so dass es zukünftig besser ist, zu einer multiplikativen Operation immer auch eine additive Operation zu ermitteln.

Beispiele:

```
abfrage_idee_op(  3*x+6, -x-2,  [mul, [ (-3, 0)]] , X, Y,Z).
X = [add, nix]
Y = [mul, [ (-0.333333, 0)]]
Z = [mul, [ (-0.333333, 0)]]

abfrage_idee_op(  3*x+6, 3*x+2,  [add, [ (-4, 1)]] , X, Y,Z).
X = [add, [ (-4, 0)]]
Y = [mul, nix]
Z = [add, [ (-4, 0)]]

abfrage_idee_op(  3*x+6, 3*x+2,  [add, [ (1/4, 1)]] , X, Y,Z).
X = [add, nix]
Y = [mul, nix]
Z = [add, [ (-4, 0)]]

abfrage_idee_op( 5*x, x, [add, [( -5, 0)]], X, Y, Z).
X = [add, nix]
Y = [mul, [ (0.2, 0)]]
Z = [mul, [ (0.2, 0)]]

abfrage_idee_op( 5*x, x, [add, [( -4, 0)]], X, Y, Z).
X = [add, [ (-4, 1)]]
Y = [mul, nix]
Z = [mul, [ (0.2, 0)]]
```

1. Gleichungs-seite	2. Gleichungs-seite	Operations-hinweis	additive Teiloperation	multiplikative Teiloperation	ermittelte Teiloperation
3x + 6	-x – 2	$\cdot(-3)$	nix	$\cdot(-\frac{1}{3})$	$\cdot(-\frac{1}{3})$
3x + 6	3x + 2	-4x	-4	nix	-4
3x + 6	3x + 2	$\frac{1}{4}x$	nix	nix	-4
5x	x	-5	nix	$\cdot(-0{,}2)$	$\cdot(-0{,}2)$
5x	x	-4	-4x	nix	$\cdot(-0{,}2)$

Tabelle 59: Erläuterung zu abfrage_idee_op

gemachte_umformung_r

gemachte_umformung_r ermittelt für eine gegebene Umformung mit Umformungshinweis,

- ob diese Umformung richtig (incl. richtigem Umformungshinweis) ist,
- wie der Umformungshinweis (OpOut) lautet (oder lauten müßte) und
- welche Strategie verwendet wurde.

Beispiel 1:
gemachte_umformung_r([3*x-8, 9*x+1], [-6*x-8, 1], [add, [(-9, 1)]], X, Y, Z).
X = 1
Y = [add, [(-9, 1)]]
Z = 2

Erläuterung:
Die Umformung lautet:

$$
\begin{aligned}
3x - 8 &= 9x + 1 \quad | -9x \\
-6x - 8 &= 1
\end{aligned}
$$

Die Umformung ist richtig mit richtigem Umformungshinweis
Der Umformungshinweis lautet: –9x
Die verwendete Strategie lautet: „x-Term nach links".

Beispiel 2:
gemachte_umformung_r([3*x-8, 9*x+1], [-6*x-8, 1], [add, [(1, 0)]], X, Y, Z).
X = 0
Y = [add, [(-9, 1)]]
Z = 2

Erläuterung:
Die Umformung lautet:

$$
\begin{aligned}
3x - 8 &= 9x + 1 \quad | +1 \\
-6x - 8 &= 1
\end{aligned}
$$

Die Umformung ist falsch (evtl. nur falscher Umformungshinweis).
Der Umformungshinweis lautet: –9x
Die verwendete Strategie lautet: „x-Term nach links".

Beispiel 3:
gemachte_umformung_r([3*x-8, 9*x+1], [-6*x-8, 1], [add, [(-9, 0)]], X, Y, Z).
X = 0
Y = [add, [(-9, 1)]]
Z = 2

Erläuterung:
Die Umformung lautet:

$$\begin{aligned} 3x - 8 &= 9x + 1 \quad | -9 \\ -6x - 8 &= 1 \end{aligned}$$

Die Umformung ist falsch (evtl. nur falscher Umformungshinweis).
Der Umformungshinweis lautet: –9x
Die verwendete Strategie lautet: „x-Term nach links“.

Beispiel 4:
gemachte_umformung_r([3*x-8, 9*x+1], [-6*x-8, -1], [add, [(-9, 1)]], X, Y, Z).
X = 0
Y = [falsch_umgeformt]
Z = 2

Erläuterung:
Die Umformung lautet:

$$\begin{aligned} 3x - 8 &= 9x + 1 \quad | -9x \\ -6x - 8 &= -1 \end{aligned}$$

Die Umformung ist falsch (evtl. nur falscher Umformungshinweis).
Die Umformung ist falsch. Es gibt keinen korrekten Umformungshinweis.
Die verwendete Strategie lautet: „x-Term nach links“.

Weitere Funktionen in ANALYSE.PL betreffen die Klassifikation der Gleichung und haben rein deklarativen Charakter.

Dies sind mach_a_typ_grad, mach_a_typ_form und mache_gleichungs_grad.

mach_a_typ_grad

mach_a_typ_grad kodiert eine Gleichungsseite (also einen Term im mathematischen Sinne) durch eine mindestens vierstellige Zahl (Ziffernfolge).

Die letzten drei Ziffern beschreiben den Zahlenraum des Terms.

Die letzte Ziffer gibt den Zahlenraum der Konstanten in normalisierter Form an (siehe sform_k).

Die zweitletzte Ziffer gibt den Zahlenraum des x-Terms in normalisierter Form an (siehe sform_x).

Eine 1 an drittletzter Stelle bedeutet, dass der Term kein führendes Minuszeichen besitzt, eine 2, dass dieser Term ein führendes Minuszeichen besitzt.

Die anderen Ziffern betreffen die Reihenfolge der Teilterme.

Steht an viertletzter Stelle eine 1, dann ist der erste Teilterm ein Term mit x. Steht dort eine 2 ist der erste Teilterm eine Konstante.

Ab der viertletzten Stelle wird die Reihenfolge der Teilterme entsprechend abgelesen. Wichtig ist, dass von rechts nach links gelesen wird. Dies ist sicherlich ungewohnt, aber sinnvoll, weil auf diese Art beliebig lange Terme klassifiziert werden und die wesentlichen Informationen über den Zahlbereich immer an den letzten drei Stellen abgelesen werden können.

Beispiele:

mach_a_typ_grad(5*x, X). X = 1180

Erläuterung zu 1|180
- 0 bedeutet, dass keine Konstante vorhanden ist.
- 8 bedeutet, dass der Faktor vor dem x eine ganze Zahl ist.
- 1 an der drittletzten Stelle bedeutet, dass der Term nicht mit „Minus beginnt".
- 1 an der viertletzten Stelle bedeutet, dass der Term mit einem x-Term beginnt.

mach_a_typ_grad(5*x+9, X). X = 21188

Erläuterung zu 21|188
- 8 an der letzten Stelle bedeutet, dass die Konstante ganzzahlig ist.
- 8 an der zweitletzten Stelle bedeutet, dass der Faktor vor dem x ganzzahlig ist.
- 1 an der drittletzten Stelle bedeutet, dass der Term nicht mit „Minus beginnt".
- 1 an der viertletzten Stelle bedeutet, dass der Term mit einem x-Term beginnt.
- 2 an der fünftletzten Stelle bedeutet, dass der Term eine Konstante als zweiten Teilterm besitzt.

mach_a_typ_grad(-1+5*x+9, X). X = 212288

Erläuterung zu 212|288
- 8 an der letzten Stelle bedeutet, dass die Konstante ganzzahlig ist.
- 8 an der zweitletzten Stelle bedeutet, dass der Faktor vor dem x ganzzahlig ist.
- 2 an der drittletzten Stelle bedeutet, dass der Term mit „Minus beginnt".
- 2 an der viertletzten Stelle bedeutet, dass der Term mit einer Konstanten beginnt.
- 1 an der fünftletzten Stelle bedeutet, dass der Term einen x-Term als zweiten Teilterm besitzt.
- 2 an der sechstletzten Stelle bedeutet, dass der Term eine Konstante als dritten Teilterm besitzt.

mache_gleichungs_grad

mache_gleichungs_grad vergleicht linke und rechte Seite und klassifiziert die Gleichung   Ax + B = Cx + D nach der Differenz A – C und der Differenz D – B.

Beispiele:

mache_gleichungs_grad([(5, 1)],[(-9, 1), (2,0)], X).   X = 11

mache_gleichungs_grad([(5, 1)],[(-9, 1), (-2,0)], X).   X = 12

mache_gleichungs_grad([(5, 1)],[(9, 1), (2,0)], X).   X = 21

mache_gleichungs_grad([(5, 1)],[(9, 1), (-2,0)], X).   X = 22

mache_gleichungs_grad([(5, 1), (2, 0)],[(9, 1), (2,0)], X). X = 23

mache_gleichungs_grad([(5, 1), (2, 0)],[(5, 1), (2,0)], X). X = 33

Gleichung	mache_ gleichungs_grad	Bedeutung
5x = -9x + 2	11	A – C > 0 D – B > 0
5x = -9x – 2	12	A – C > 0 D – B < 0
5x = 9x + 2	21	A – C < 0 D – B > 0
5x = 9x – 2	22	A – C < 0 D – B < 0
5x + 2 = 9x + 2	23	A – C < 0 D – B = 0
5x + 2 = 5x + 2	33	A – C = 0 D – B = 0

Tabelle 60: Erläuterung zu mache_gleichungs_grad

4. Prologdatei ATYPEN.PL

In ATYPEN.PL sind die Regeln für das Erkennen des Aufgabentyps einer Gleichung definiert. Dabei werden alle Schreibweisen der Schülerinnen und Schüler unterschieden und klassifiziert. Ziel ist es, alle syntaktisch unterschiedlichen, aber mathematisch identischen Notationen zu unterscheiden.

Die zu erkennende Gleichung wird der Funktion a_typ als Menge von Termen übergeben. Die Menge wird in eckigen Klammern, die Elemente werden durch Kommata getrennt übergeben. Es dürfen auch mehr oder weniger als zwei Terme in der Menge angegeben werden[152].

[152] Andere Benutzer (Experten) können und sollen sich hier ihre eigenen Regeln definieren.

Der Aufgabentyp wird als Liste von Zahlen zurückgegeben, die eine entsprechende Klassifikation des Gleichungstyps darstellt.

Als zusätzliche Regeln sind a_typ_bestimmung, mache_s_typ, normiere_s_typ und s_typ deklariert.

a_typ

a_typ erzeugt für Gleichungen eine Liste von Zahlencodes, die im explorativen Stadium des Regelwerks eine möglichst genaue Deklaration der linearen Gleichungen ermöglichen soll.

Dabei ist mit Absicht nicht auf Redundanz verzichtet wurde, da eine genaue Auswertung mit dem Statistikpaket SPSS erfolgen sollte, SPSS eine Rechteckdarstellung der Datenbank verlangt und dynamische Abfragen nur unzulänglich möglich sind. Für den zukünftigen Fall als Grundlage eines tutoriellen Systems sollte Redundanz vermieden werden.

Ziel ist es, jede Zeile im Gleichungslösungsprozess[153] der Schülerinnen und Schüler als „Gleichung" zu interpretieren.

Bei den Tests der Schülerinnen und Schüler zeigte sich, dass nicht nur syntaktisch korrekte Gleichungen (das Gleichheitszeichen wird nur als Vergleichszeichen verwendet) benutzt wurden, sondern auch Zeilen

- mit nur einem Zahlenwert (Bsp.: 5),
- mit einem führenden Gleichheitszeichen (Bsp.: = 3x + 8 = 5x – 9)[154] oder
- mit insgesamt bis zu 3 Gleichheitszeichen.

Da Prolog mit allen Schülernotationen „umgehen" soll, ist es notwendig gewesen, entsprechende Deklarationen vorzunehmen. Gleichzeitig soll die Liste aus Verarbeitungsgründen nicht zu groß werden, so dass ich mich auf eine Liste mit 10 Stellen beschränkt habe.

Folgende Schreibweisen für Gleichungen (Zeilen) wurden von Schülerinnen und Schüler verwendet und sollten unter Prolog möglichst erkannt und unterschieden werden:

Beispiele für Schülerschreibweisen:

(1) -2x + 9 + 5x – 5 = 0
(2) 4x = 9x + 5 - 9

---

[153] ohne Operationshinweis oder Bemerkung
[154] Dieses Gleichheitszeichen „=" interpretiere ich als Äquivalenzzeichen „⇔". Diese Schreibweise wurde häufig verwendet.

(3) x = $-\frac{2}{14} = -\frac{1}{7}$

(4) x = $\frac{16}{14} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$

(5) = 14x – 4 = -6

(6) = $\frac{7}{-9}$

(7) x =

(8) $1\frac{3}{6}$

(9) 9x3x = +1 – 8

Die ersten 4 Gleichungen bzw. Gleichungsketten sind aus mathematischer Sicht syntaktisch korrekt. Wichtig ist, dass bei den ersten beiden Gleichungen die Information über die Reihenfolge und die Art der Teilterme bei der Deklaration nicht verloren gehen.

Die dritte und vierte Gleichung verdeutlichen, dass bei der Deklaration auch mehr als ein Gleichheitszeichen in einer Gleichung (-skette) vorkommen kann.

Die fünfte Gleichung ist syntaktisch nicht mehr korrekt; entweder bedeutet das erste Gleichheitszeichen das Äquivalenzzeichen, oder die Gleichung wird als Reduktion (vgl. Matz) interpretiert.

Die letzten drei „Gleichungen" verlangen im Vorfeld der Deklaration spezielle Deutungen, da Konventionen bzgl. der Syntax verletzt sind.

Interpretationen dieser Formen sollten allerdings bei der Atypen-Deklaration noch nicht geschehen.

Bei der Ermittlung der Utypen (siehe nächsten Abschnitt) für das Erkennen der von den Schülerinnen und Schülern durchgeführten Umformung sind Interpretationen allerdings nicht mehr zu vermeiden.

Für die Klassifikation wurden berücksichtigt:

- der Zahlenraum (mit Besonderheiten für 0, 1x, -1x) z. B. bei at5 und at6;
- die Anzahl der Teilterme z. B. bei at9 und at10;
- die Reihenfolge der Teilterme z. B. bei at9 und at10;
- die Anzahl der Gleichheitszeichen z. B. bei at3 und at4;
- inwieweit eine Gleichungsseite mit einem führenden Minuszeichen beginnt z. B. bei at9 und at10;
- der Vergleich zwischen den Koeffizienten von x und der Konstanten auf beiden Seiten z. B. bei at2.

Gleichung	at1	at2	at3	at4	at5	at6	at7	at8	at9	at10
x=2	-1	11	-1	-1	161903	903181	-1	-1	1180	2108
x=-1,125	-1	12	-1	-1	161903	903112	-1	-1	1180	2201
x=-5/3	-1	12	-1	-1	161903	903122	-1	-1	1180	2202
2=1x	-1	22	-1	-1	903181	151903	-1	-1	2108	1150
-1x+4=5	-1	21	-1	-1	152181	903181	-1	-1	21268	2108
-2=14x	-1	21	-1	-1	903182	181903	-1	-1	2208	1180
x=0	-1	13	-1	-1	161903	903170	-1	-1	1180	2107
-2=6x+5	-1	21	-1	-1	903182	181181	-1	-1	2208	21188
3x+4=2x+6	-1	11	-1	-1	181181	181181	-1	-1	21188	21188
-6x=8x-16	-1	22	-1	-1	182903	181182	-1	-1	1280	21188
-2x+9+5x-5=0	-1	12	-1	-1	6181181	903170	-1	-1	2121288	2107
4x=9x+5-9	-1	22	-1	-1	181903	6181182	-1	-1	1180	221188
0=5+5x	-1	21	-1	-1	903170	6181181	-1	-1	2107	12188
-4x+x=5	-1	21	-1	-1	6182170	903181	-1	-1	11280	2108
x+4x=5	-1	11	-1	-1	6181170	903181	-1	-1	11180	2108
x=-2/14=-1/7	12	33	-1	161903	903122	903122	-1	1180	2202	2202
x=16/14=8/7=1b1/7	11	33	161903	903121	903121	903191	1180	2102	2102	2103
=14x-4=-6	0	12	-1	0	181182	903182	-1	2	21188	2208
=7/-9	-1	0	-1	-1	0	903192	-1	-1	1	2202
x=	-1	0	-1	-1	161903	0	-1	-1	1180	1
1b3/6	-1	0	-1	-1	0	903191	-1	-1	0	2103
9x3x=+1-8	-1	0	-1	-1	99999999	903192	-1	-1	99999999	22208

Tabelle 61 Atypen

Erläuterung für die Gleichung x = 2:

at1	at2	at3	at4	at5	at6	at7	at8	at9	at10
-1	11	-1	-1	161903	903181	-1	-1	1180	2108

Tabelle 62 Atypen für x = 2

- Die -1 bei at1, at3, at4, at7 und at8 bedeutet, dass es sich um eine „normale“ Gleichung mit nur einem Gleichheitszeichen handelt.
- 11 bei at2 bedeutet, dass der Koeffizient beim x-Term auf der linken Gleichungsseite größer ist als der auf der rechten Gleichungsseite und die Konstante auf der rechten Gleichungsseite größer ist als die Konstante auf der linken Gleichungsseite. (siehe mache_gleichungs_grad).
- 161|903 bei at5 bedeutet für die linke Gleichungsseite, dass der x-Teilterm x lautet (161) und der Konstantenterm 0 ist (903). Siehe dazu den folgenden Listingauszug zu s_typ.
- 903|181 bei at6 bedeutet für die rechte Gleichungsseite, dass ein x-Teilterm nicht vorhanden ist (903) und der Konstantenterm eine positive ganze Zahl ist (181).
- 1|180 bei at9 bedeutet für die linke Gleichungsseite, dass lediglich ein x-Term vorhanden ist, kein führendes Minuszeichen vorhanden ist und der Koeffizient des x-Terms ganzzahlig ist. Siehe hierzu mach_a_typ_grad.
- 2|108 bei at10 bedeutet für die rechte Gleichungsseite, dass kein x-Term vorhanden ist, kein führendes Minuszeichen vorhanden ist und die Konstante ganzzahlig ist.

Erläuterung für die Gleichung 3x + 4 = 2x + 6:

at1	at2	at3	at4	at5	at6	at7	at8	at9	at10
-1	11	-1	-1	181181	181181	-1	-1	21188	21188

Tabelle 63 Atypen für 3x + 4 = 2x + 6

- Die -1 bei at1, at3, at4, at7 und at8 bedeutet, dass es sich um eine „normale“ Gleichung mit nur einem Gleichheitszeichen handelt.
- 11 bei at2 bedeutet, dass der Koeffizient beim x-Term auf der linken Gleichungsseite größer ist als der auf der rechten Gleichungsseite und die Konstante auf der rechten Gleichungsseite größer ist als die Konstante auf der linken Gleichungsseite.
- 181|181 bei at5 bedeutet für die linke Gleichungsseite, dass der Koeffizient bem x-Teilterm ganzzahlig und positiv ist (181) und der Konstantenterm ebenfalls ganzzahlig und positiv ist (181).
- 181|181 bei at6 bedeutet für die rechte Gleichungsseite, dass der Koeffizient beim x-Teilterm ganzzahlig und positiv ist (181) und der Konstantenterm ebenfalls ganzzahlig und positiv ist (181).
- 21|188 bei at9 bedeutet für die linke Gleichungsseite, dass erst ein x-Term vorhanden und dann eine Konstante, kein führendes Minuszeichen vorhanden ist und der Koeffizient des x-Terms ganzzahlig und die Konstante ganzzahlig sind.
- 21|188 bei at10 bedeutet für die rechte Gleichungsseite, dass erst ein x-Term vorhanden ist und dann eine Konstante, kein führendes Minuszeichen auftritt und der Koeffizient des x-Terms ganzzahlig und die Konstante ganzzahlig sind.

Die folgende Tabelle soll einen groben Überblick über die Ausprägungen für die Atypen geben.

Stelle	Ausprägung	Wert	Erklärung
at1	Art der Gleichung (für den Fall von 2 oder 3 „="-Zeichen)	-1 0 2-stellige Zahl 99999999	keine 2 oder 3 „="-Zeichen (Normalfall) führendes „="-Zeichen (Äquivalenzzeichen (?)) 2 oder 3 „="-Zeichen verwendet (3 oder4 Gleichungsseiten) nicht erkannt
at2	Art der Gleichung (Normalfall)	0 2-stellige Zahl 99999999	nicht als Gleichung erkannt Normalfall (2 Gleichungsseiten) nicht erkannt
at3	Typ der ersten Seite (für den Fall von 3 „="-Zeichen)	-1 0 6- oder 7-stellige Zahl 99999999	keine 3 „="-Zeichen (Normalfall) führendes „="-Zeichen (Äquivalenzzeichen (?)) 3 „="-Zeichen verwendet (4 Gleichungsseiten) nicht erkannt
at4	Typ der ersten Seite (für den Fall von 2 „="-Zeichen)	-1 0 6- oder 7-stellige Zahl 99999999	keine 2 „="-Zeichen (Normalfall) führendes „="-Zeichen (Äquivalenzzeichen (?)) 2 „="-Zeichen verwendet (3 Gleichungsseiten) nicht erkannt
at5	Typ der linken Seite (für den Fall von 1 „="-Zeichen) (Normalfall)	0 6- oder 7-stellige Zahl 99999999	leer Normalfall (2 Gleichungsseiten) nicht erkannt
at6	Typ der rechten Seite (für den Fall von 1 „="-Zeichen) (Normalfall)	0 6- oder 7-stellige Zahl 99999999	leer Normalfall (2 Gleichungsseiten) nicht erkannt
at7	Termkonstruktion der ersten Seite (für den Fall von 3 „="-Zeichen)	-1 2 mindestens 4-stellige Zahl 99999999	keine 3 „="-Zeichen (Normalfall) Form x/x 3 „="-Zeichen verwendet (4 Gleichungsseiten) nicht erkannt
at8	Termkonstruktion der ersten Seite (für den Fall von 2 „="-Zeichen)	-1 2 mindestens 4-stellige Zahl 99999999	keine 2 „="-Zeichen (Normalfall) führendes „="-Zeichen (Äquivalenz) 2 „="-Zeichen verwendet (3 Gleichungsseiten) nicht erkannt
at9	Termkonstruktion der linken Seite (Normalfall)	0 1 2 mindestens 4-stellige Zahl 99999999	kein „="-Zeichen (Konstante) leer Form x/x Normalfall (2 Gleichungsseiten) nicht erkannt
at10	Termkonstruktion der rechten Seite (Normalfall)	1 2 mindestens 4-stellige Zahl 99999999	leer Form x/x Normalfall (2 Gleichungsseiten) nicht erkannt

Tabelle 64: Ausprägung für Atypen

Für a_typ wird die Funktion **a_typ_bestimmung** verwendet, die at1 und at2 mit **gleichungs_grad** at7 bis at10 mit **mach_a_typ_grad** at3 bis at6 mit **mache_s_typ** ermittelt.

a_typ_bestimmung sorgt für die entsprechende Zusammensetzung der Liste für alle Gleichungen; also insbesondere für die Zeilen, die Schülerinnen und Schüler verwendet haben, die nicht der üblichen Syntax für eine Gleichung entsprechen.
mach_a_typ_grad ist in ANALYSE.PL implementiert[155].

mache_s_typ ermittelt mit **s_typ** die 6-stellige Kodierung für die Gleichungsseiten.

Falls die Gleichungsseite nicht in der Normalform Ax + B vorliegt, wird diese vorab normiert und zusätzlich die Ziffer 6 vor die 6-stellige Zahl gesetzt.

Diese Einschränkung (das Vorabnormieren) ergab sich aus Optimierungsgründen, da eine Berücksichtigung der Orginalform das Regelwerk unnötig aufgebläht hätte und der mit der Normierung verbundene Informationsverlust durch mach_a_typ_grad aufgehoben wird.

s_typ klassifiziert die Formen Ax + B, wobei die ersten drei Ziffern für den Koeffizienten A stehen und die letzten drei Ziffern für B. Anhand des Listingauszugs ist zu erkennen, was die einzelnen Zahlen bedeuten:

```
%
% Form 0
%
s_typ( [ 0 ], 903170 ).

%
% Form D
%
s_typ( [ D ], 903181 ) :- integer(D), D>0.
s_typ( [ D ], 903182 ) :- integer(D), D<0.
s_typ( [ D ], 903111 ) :- number(D), not integer(D), D>0.
s_typ( [ D ], 903112 ) :- number(D), not integer(D), D<0.
s_typ( [ D1 / D2 ], 903121 ) :- number(D1), number(D2), D1>0, D2>0.
s_typ( [ D1 / D2 ], 903122 ) :- number(D1), number(D2), D1<0, D2>0.
s_typ( [ D1 / 0 ], 903999 ) :- konstante(D1).
s_typ( [ D1 : D2 ], 903221 ) :- number(D1), number(D2), D1>0, D2>0.
s_typ( [ D1 : D2 ], 903222 ) :- number(D1), number(D2), D1<0, D2>0.
s_typ( [ D1 : 0 ], 903999 ) :- konstante(D1).
s_typ( [ D1 b D2 / D3 ], 903131 ) :- number(D1), number(D2), number(D3), D1>0, D2>0, D3>0.
s_typ( [ D1 b D2 / D3 ], 903132 ) :- number(D1), number(D2), number(D3), D1<0, D2>0, D3>0.
s_typ( [ D1 b D2 / 0 ], 903999 ) :- konstante(D1), konstante(D2).
s_typ( [ D1 p D2 ], 903141 ) :- number(D1), number(D2), D1>0, D2>0.
s_typ( [ D1 p D2 ], 903142 ) :- number(D1), number(D2), D1<0, D2>0.
s_typ( [ 0 q D ], 903141 ) :- number(D), D>0.
s_typ( [ -0 q D ], 903142 ) :- number(D), D>0.
```

[155] siehe Erläuterung in obigem Abschnitt.

```
s_typ( [ D ], 903190 ) :- konstante(D), dezimal( D, DD), DD=0.
s_typ( [ D ], 903191 ) :- konstante(D), dezimal( D, DD), DD>0.
s_typ( [ D ], 903192 ) :- konstante(D), dezimal( D, DD), DD<0.

%
% Form x
%
s_typ( [ x ], 161903 ).
s_typ( [ 1 * x], 151903 ).
s_typ( [ -x ], 162903 ).
s_typ( [ -1 * x ], 152903 ).

%
% Form Ax
%
s_typ( [ A * x ], 181903 ) :- integer(A), A>0, A =\= 1.
s_typ( [ A * x ], 182903 ) :- integer(A), A<0, A =\= -1.
s_typ( [ 0 * x ], 170903 ).
s_typ( [ A * x ], 111903 ) :- number(A), not integer(A), A>0, A =\= 1.
s_typ( [ A * x ], 112903 ) :- number(A), not integer(A), A<0, A =\= -1.
s_typ( [ A1/A2 * x ], 121903 ) :- number(A1), number(A2), dezimal( A1/A2, AD), AD>0, AD =\= 1.
s_typ( [ A1/A2 * x ], 122903 ) :- number(A1), number(A2), dezimal( A1/A2, AD), AD<0, AD =\= -1.
s_typ( [ 0/A2 * x ], 170903 ) :- number(A2), A2 =\= -1.
s_typ( [ A1/0 * x ], 999903 ) :- konstante(A1).
s_typ( [ A1 : A2 * x ], 221903 ) :- number(A1), number(A2), dezimal( A1 : A2, AD), AD>0, AD =\= 1.
s_typ( [ A1 : A2 * x ], 222903 ) :- number(A1), number(A2), dezimal( A1 : A2, AD), AD<0, AD =\= -1.
s_typ( [ 0 : A2 * x ], 170903 ) :- number(A2), A2=\=0.
s_typ( [ A1 : 0 * x ], 999903 ) :- konstante(A1).
s_typ( [ A1 b A2/A3 * x ], 131903 ) :- number(A1), number(A2), number(A3), dezimal( A1 b A2/A3, AD), AD>0, AD =\= 1.
s_typ( [ A1 b A2/A3 * x ], 132903 ) :- number(A1), number(A2), number(A3), dezimal( A1 b A2/A3, AD), AD<0, AD =\= -1.
s_typ( [ A1 b A2/A3 * x ], 170903 ) :- number(A1), number(A2), number(A3), dezimal( A1 b A2/A3, AD), AD=0.
s_typ( [ A1 b A2/0 * x ], 999903 ) :- konstante(A1), konstante(A2).
s_typ( [ A1 p A2 * x ], 141903 ) :- number(A1), number(A2), dezimal( A1 p A2, AD), AD>0, AD =\= 1.
s_typ( [ A1 p A2 * x ], 142903 ) :- number(A1), number(A2), dezimal( A1 p A2, AD), AD<0, AD =\= -1.
s_typ( [ 0 p A2 * x ], 141903 ) :- number(A1), number(A2), dezimal( 0 p A2, AD), AD>0, AD =\= 1.
s_typ( [ 0 p A2 * x ], 142903 ) :- number(A1), number(A2), dezimal( 0 p A2, AD), AD<0, AD =\= -1.
s_typ( [ A * x ], 191903 ) :- konstante(A), dezimal(A, AD), AD>0.
s_typ( [ A * x ], 192903 ) :- konstante(A), dezimal(A, AD), AD<0.
s_typ( [ A * x ], 190903 ) :- konstante(A), dezimal(A, AD), AD=0.

%
% Form x+B
%
s_typ( [ x+B ], 161181 ) :- integer(B), B>0.
s_typ( [ 1 * x+B ], 151181 ) :- integer(B), B>0.
s_typ( [ x-B ], 161182 ) :- integer(B), B>0.
s_typ( [ 1 * x-B ], 151182 ) :- integer(B), B>0.
s_typ( [ x+B ], 161111 ) :- number(B), not integer(B), B>0.
s_typ( [ 1 * x+B ], 151111 ) :- number(B), not integer(B), B>0.
s_typ( [ x-B ], 161112 ) :- number(B), not integer(B), B>0.
s_typ( [ 1 * x-B ], 151112 ) :- number(B), not integer(B), B>0.
s_typ( [ x+0 ], 161170 ).
s_typ( [ 1 * x+0 ], 151170 ).
s_typ( [ x-0 ], 161170 ).
```

```
s_typ( [ 1 * x-0 ], 151170 ).

s_typ( [ x+B ], 161191 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ 1 * x+B ], 151191 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ x-B ], 161192 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ 1 * x-B ], 151192 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ x+B ], 161190 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD = 0.
s_typ( [ 1 * x+B ], 151190 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD = 0.
s_typ( [ x-B ], 161190 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD = 0.
s_typ( [ 1 * x-B ], 151190 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD = 0.

s_typ( [ -x+B ], 162181 ) :- integer(B), B>0.
s_typ( [ -1 * x+B ], 152181 ) :- integer(B), B>0.
s_typ( [ -x-B ], 162182 ) :- integer(B), B>0.
s_typ( [ -1 * x-B], 152182 ) :- integer(B), B>0.
s_typ( [ -x+B ], 162111 ) :- number(B), not integer(B), B>0.
s_typ( [ -1 * x+B ], 152111 ) :- number(B), not integer(B), B>0.
s_typ( [ -x-B ], 162112 ) :- number(B), not integer(B), B>0.
s_typ( [ -1 * x-B], 152112 ) :- number(B), not integer(B), B>0.
s_typ( [ -x+0 ], 162170 ).
s_typ( [ -1 * x+0 ], 152170 ).
s_typ( [ -x-0 ], 162170 ).
s_typ( [ -1 * x-0 ], 152170 ).

s_typ( [ -x+B ], 162191 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ -1 * x+B ], 152191 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ -x-B ], 162192 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ -1 * x-B ], 1521902 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ -x+B ], 162190 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD = 0.
s_typ( [ -1 * x+B ], 152190 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD = 0.
s_typ( [ -x-B ], 162190 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD = 0.
s_typ( [ -1 * x-B ], 152190 ) :- konstante(B), dezimal(B, BD), BD = 0.


%
% Form Ax+B
%
s_typ( [ A * x+B ], 181181 ) :- integer(A), integer(B), A>0, A =\=1, B>0.
s_typ( [ A * x-B ], 181182 ) :- integer(A), integer(B), A>0, A =\=1, B>0.
s_typ( [ A * x+B ], 182181 ) :- integer(A), integer(B), A<0, A =\= -1, B>0.
s_typ( [ A * x-B ], 182182 ) :- integer(A), integer(B), A<0, A =\= -1, B>0.
s_typ( [ A * x+0 ], 181170 ) :- integer(A), A>0, A =\= 1.
s_typ( [ A * x+0 ], 182170 ) :- integer(A), A<0, A =\= -1.
s_typ( [ A * x-0 ], 181170 ) :- integer(A), A>0, A =\= 1.
s_typ( [ A * x-0 ], 182170 ) :- integer(A), A<0, A =\= -1.
s_typ( [ A * x+B ], 111111 ) :- number(A), number(B), A>0, A =\=1, B>0.
s_typ( [ A * x-B ], 111112 ) :- number(A), number(B), A>0, A =\=1, B>0.
s_typ( [ A * x+B ], 112111 ) :- number(A), number(B), A<0, A =\= -1, B>0.
s_typ( [ A * x-B ], 112112 ) :- number(A), number(B), A<0, A =\= -1, B>0.
s_typ( [ A * x+0 ], 111170 ) :- number(A), A>0, A =\= 1.
s_typ( [ A * x+0 ], 112170 ) :- number(A), A<0, A =\= -1.
s_typ( [ A * x-0 ], 111170 ) :- number(A), A>0, A =\= 1.
s_typ( [ A * x-0 ], 112170 ) :- number(A), A<0, A =\= -1.
s_typ( [ A * x+B ], 191191 ) :- konstante(A), konstante(B), dezimal(A, AD), AD>0, AD =\= 1, dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ A * x-B ], 191192 ) :- konstante(A), konstante(B), dezimal(A, AD), AD>0, AD =\= 1, dezimal(B, BD), BD>0.
```

```
s_typ( [ A * x+B ], 192191 ) :- konstante(A), konstante(B), dezimal(A, AD), AD<0, AD =\= -1, dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ A * x-B ], 192192 ) :- konstante(A), konstante(B), dezimal(A, AD), AD<0, AD =\= -1, dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ A * x+B ], 191190 ) :- konstante(A), konstante(B), dezimal(A, AD), AD>0, AD =\= 1, dezimal(B, BD), BD = 0.
s_typ( [ A * x+B ], 192190 ) :- konstante(A), konstante(B), dezimal(A, AD), AD<0, AD =\= -1, dezimal(B, BD), BD = 0.
s_typ( [ A * x-B ], 191190 ) :- konstante(A), konstante(B), dezimal(A, AD), AD>0, AD =\= 1, dezimal(B, BD), BD = 0.
s_typ( [ A * x-B ], 192190 ) :- konstante(A), konstante(B), dezimal(A, AD), AD<0, AD =\= -1, dezimal(B, BD), BD = 0.

s_typ( [ 0 * x+B ], 170111 ) :- number(B), B>0.
s_typ( [ 0 * x-B ], 170112 ) :- number(B), B>0.
s_typ( [ 0 * x+0 ], 170170 ).
s_typ( [ A * x+B ], 190191 ) :- konstante(A), konstante(B), dezimal(A, AD), AD=0, dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ A * x-B ], 190192 ) :- konstante(A), konstante(B), dezimal(A, AD), AD=0, dezimal(B, BD), BD>0.
s_typ( [ A * x+B ], 190190 ) :- konstante(A), konstante(B), dezimal(A, AD), AD=0, dezimal(B, BD), BD = 0.

%
% Form leer
%
s_typ( [ leer ], 903003 ).
s_typ( [ equiv ], 903903 ).

s_typ( [ _ ], 999999 ).
```

Listing 1 Auszug aus ATYPEN.PL: s_typ

5.5. UTYPEN.PL

In UTYPEN.PL sind die Regeln deklariert, die die eigentliche Klassifikation der einzelnen Umformungsschritte durchführen. Für jede gegebene Umformung wird eine Liste von 23 Werten ermittelt, die eine möglichst präzise Klassifikation der von der Schülerin, dem Schüler gemachten Umformung erlauben soll. Die dabei verwendeten Prozeduren sind **check_u_typ** und **u_typ**.

check_u_typ

check_u_typ ruft im Wesentlichen u_typ auf.

Allerdings findet hierbei eine Anpassung für die Umformungen statt, die nicht der Normalform LS1 = RS1 **|** Op ⇒ LS2 = RS2 entsprechen.

Dies betrifft also all die Formen, die Schülerinnen und Schüler notiert haben und die entweder syntaktisch falsch sind, mehr als ein Gleichheitszeichen pro Zeile oder unvollständige Gleichungen enthalten.

Beispiele für Ursprungsgleichungen	Bedeutung	verwendete Gleichung	Bedeutung
[leer, 3]	= 3	[x , 3]	x = 3
[leer, 3*x+1]	= 3x + 1	[x , 3*x+1]	x = 3x + 1
[3]	3	[x , 3]	x = 3
[3*x+1]	3x + 1	[x , 3*x+1]	x = 3x + 1
[x/x, 3*x]	$\frac{x}{x}$ = 3x	[1 , 3*x]	1 = 3x
[3*x/4*x, 3*x]	$\frac{3x}{4x}$ = 3x	[1 , 3*x]	1 = 3x
[equiv, 4*x – 1, 3*x+1]	= 4x – 1 = 3x + 1	[4*x – 1, 3*x+1]	4x – 1 = 3x+ 1
[x, 4 – 1, 3]	x= 4 – 1 = 3	[x, 4 – 1]	x = 4 – 1
[x, 4*x – x, 3*x]	x= 4x – x = 3x	[x, 4*x – 3*x]	x = 4x – x
[x , -16/14, -8/7, 1 b 1 /7]	$x = -\frac{16}{14} = -\frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$	[x , 1 b 1/7]	$x = 1\frac{1}{7}$
[3*x + 8, 9*x+ 1, -6*x + 8, 1]	3x + 8 = 9x +1 = -6x +8 = 1	[3*x + 8, 1]	3x + 8 = 1

Tabelle 65: Erläuterungen zu check_u_typ

Diese Ersetzungen bedeuteten einige Einschränkungen, die sich im Vorfeld als sinnvoll darstellten, im Nachhinein aber zu Inkorrektheiten führten.

Dies betraf die Fälle, in denen die Schülerinnen und die Schüler die Standard-notation verletzten.
So wurden nicht nur einzelne Konstanten (ohne Gleichung) geschrieben, wo sich diese Zahl als Lösung der Gleichung interpretieren ließ und eine Ersetzung für die Analyse mit x = Zahl sinnvoll ist, sondern es wurden auch einzelne Terme (mit x) notiert, wo eine solche Ersetzung nicht sinnvoll war, sondern eher vermutet werden kann, dass stattdessen „0 =“ eine angemessene Ergänzung gewesen wäre.

Beispiel 1:
-2x=-2 $\Rightarrow$ 1
Die Interpretation x = 1 ist hier sicherlich günstig.

Beispiel 2:
$-9 = 6x \Rightarrow 3$
Die Interpretation x = 3 ist hier sicherlich günstig, besser wäre aber die Interpretation 3 = x (ohne Seitenvertauschung).

Beispiel 3:
$4x = 9x \mid -4x \Rightarrow 5x$
Die Interpretation von x = 5x ist hier sicherlich nicht günstig, besser wäre hier die Interpretation 0 = 5x.[156]

Beispiel 4:
$-5=3x \mid : 3 \Rightarrow -0{,}166x$
Die Interpretation von x = -0,166x ist hier sicherlich auch nicht günstig, besser wäre die Interpretation 1 = -0,166x .[157]

Warum wurden dann entsprechende Änderungen nicht sofort im Regelwerk vorgenommen?
Das hatte ganz praktische Gründe. Wenn jede einzelne Änderung oder Adaption sofort ausgeführt würde, was programmiertechnisch möglich wäre, hätte danach jedesmal eine neue vollständige Erstellung der Utypen, aber auch der Atypen erfolgen müssen. Um alle Schülerdaten auf einmal zu analysieren, benötigte ein PC mit Pentium II – Prozessor und üblicher Ausstattung sieben Tage.

u_typ

u_typ ermittelt entsprechend folgender Tabelle Kandidaten für die Teiloperationen (ut8 bis ut19) und Kandidaten für die ursprünglichen Gleichungsseiten (ut4 bis ut7).

Berücksichtigt wurden hierbei auch mögliche Seitenvertauschungen (ut6, ut7, ut11 bis ut13, ut17 bis ut19).

ut1 und ut21 liefern Informationen, inwieweit die Umformung korrekt war. Falls die Umformung richtig ist, sind ut8 bis ut19 ohne Bedeutung.

ut2 und ut3 liefern Informationen über Termzusammenfassung bei der Umformung und ut23 ermittelt die Umformungsstrategie.

[156] Dies ließe sich etwa so erklären: Durch die Subtraktion von 4x wird die linke Seite leer, deshalb wird überhaupt kein Gleichheitszeichen und keine linke Seite notiert. Eine Deutung wäre z. B. eine unvollständige Vorstellung im Zusammenhang mit 0x.
[157] Dies ließe sich etwa so erklären: Durch die Division wird eine Seite leer, deshalb wird überhaupt kein Gleichheitszeichen und nur eine Seite notiert. Eine Deutung wäre z. B. eine unvollständige Vorstellung im Zusammenhang mit 1 und 0.

Diese Art der deklarativen Bestimmung mit Abschneiden des Backtrackings widerspricht eigentlich der Idee eines Expertensystems, das selbständig die gemachte Umformung erkennen und möglichst die Stelle des gemachten Fehlers lokalisieren soll, ist in dieser Phase der Entwicklung unter Berücksichtigung des explorativen Charakters allerdings unverzichtbar. Diese Liste wird an KEFA zurückgegeben und die damit konstruierte Datei mit Hilfe von SPSS ausgewertet. Diese Datei ist selbstverständlich äußerst redundant.

Zukünftiges Ziel ist es, mit Hilfe der gewonnen Informationen ein Expertensystem zu konstruieren, dass dann in der Lage ist, diese Entscheidungen zu treffen. Grundlage hierfür sind, wie oben bereits beschrieben, die entsprechenden Regeln in der Datei ANALYSE.PL.

ut	Bedeutung	Ausprägung	Erläuterung
ut1	richtig umgeformt	0 1 2	falsch umgeformt richtig umgeformt richtig umgeformt (mit Rundungsfehler)
ut2	Termanzahl-veränderung auf der linken Seite	-1[⊗] 0 1 2	LS2 besitzt einen Term mehr als LS1 LS2 besitzt genau so viel Terme wie LS1 LS2 besitzt einen Term weniger als LS1 LS2 besitzt zwei Terme weniger als LS1
ut3	Termanzahl-veränderung auf der rechten Seite	-1 0 1 2	RS2 besitzt einen Term mehr als RS1 RS2 besitzt genau so viel Terme wie RS1 RS2 besitzt einen Term weniger als RS1 RS2 besitzt zwei Terme weniger als RS1
ut4	Kandidat für die ursprüngliche linke Seite (ohne Seitenver-tauschung)		vgl. abfrage_idee_gleichungen
ut5	Kandidat für die ursprüngliche rechte Seite (ohne Seitenver-tauschung)		vgl. abfrage_idee_gleichungen
ut6	Kandidat für die ursprüngliche linke Seite (mit Seitenver-tauschung)		vgl. abfrage_idee_gleichungen

Tabelle 66: Erläuterungen zu u_typ (1. Teil)

[⊗] Bei ut2 und ut3 sind alle ganzen Zahlen zulässig, hier werden nur einige Ausprägungen beispielhaft beschrieben.

ut	Bedeutung	Ausprägung	Erläuterung
ut7	Kandidat für die ursprüngliche rechte Seite (mit Seitenvertauschung)		vgl. abfrage_idee_gleichungen
ut8	additiver Kandidat für Teiloperation auf den linken Seiten (ohne Seitenvertauschung)		vgl. abfrage_idee_op
ut9	multiplikativer Kandidat für Teiloperation auf den linken Seiten (ohne Seitenvertauschung)		vgl. abfrage_idee_op
ut10	ermittelter Kandidat für Teiloperation auf den linken Seiten (ohne Seitenvertauschung)		vgl. finde_teil_operation
ut11	additiver Kandidat für Teiloperation auf den rechten Seiten (ohne Seitenvertauschung)		vgl. abfrage_idee_op
ut12	multiplikativer Kandidat für Teiloperation auf den rechten Seiten (ohne Seitenvertauschung)		vgl. abfrage_idee_op
ut13	ermittelter Kandidat für Teiloperation auf den rechten Seiten (ohne Seitenvertauschung)		vgl. finde_teil_operation

Tabelle 67: Erläuterungen zu u_typ (2. Teil)

ut	Bedeutung	Ausprägung	Erläuterung
ut14	additiver Kandidat für Teiloperation auf den linken Seiten (mit Seitenvertauschung)		vgl. abfrage_idee_op
ut15	multiplikativer Kandidat für Teiloperation auf den linken Seiten (mit Seitenvertauschung)		vgl. abfrage_idee_op
ut16	ermittelter Kandidat für Teiloperation auf den linken Seiten (mit Seitenvertauschung)		vgl. finde_teil_operation
ut17	additiver Kandidat für Teiloperation auf den rechten Seiten (mit Seitenvertauschung)		vgl. abfrage_idee_op
ut18	multiplikativer Kandidat für Teiloperation auf den rechten Seiten (mit Seitenvertauschung)		vgl. abfrage_idee_op
ut19	ermittelter Kandidat für Teiloperation auf den rechten Seiten (mit Seitenvertauschung)		vgl. finde_teil_operation
ut20	Bedeutung des Umformungshinweises	[multipliziert_mit_x] [dividiert_mit_x] [ohne_operationshinweis] [addiert_mit_x] [addiert_ohne_x] [anderes]	mit x oder mit x-Term multiplizieren durch x oder durch x-Term dividieren kein Operationshinweis x oder x-Term addieren Konstante addieren Konstante multiplizieren

Tabelle 68: Erläuterungen zu u_typ (3. Teil)

ut	Bedeutung	Ausprägung	Erläuterung
ut21	Umformung richtig (mit Beachtung des Umformungs-hinweises)	0 1	richtig mit korrektem Umformungshinweis falsch oder falscher Umformungshinweis
ut22	ermittelter Umformungs-hinweis		falls die Umformung richtig ist, wird hier ein richtiger Umformungshinweis ermittelt
ut23	ermittelte Umformungs-strategie	9 8 7 6 4 3 2 1 0	Konstanten weggelassen x-Terme weggelassen Termumformung Seitenvertauschung Konstante nach links Konstante nach rechts x-Term nach links x-Term nach rechts nicht erkannt

Tabelle 69: Erläuterungen zu u_typ (4. Teil)

Beispiel 1: 3x + 8 = 9x + 1 | -9x -6x + 8 = 1

```
u_typ( [3*x+8, 9*x+1], [ -6*x+8,1], [add, [ (-9, 1)]] ,X).
X =   [1,
        0,
        1,
        [[add, [ (-9, 1)]], nix],
        [[add, [ (-9, 1)]], nix],
        [[seiten_add, [ (-9, 1)]], nix],
        [[seiten_add, [ (-9, 1)]], nix],
        [[add, [ (-9, 1)]], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[mul, nix], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[add, [ (-9, 1)]], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[seiten_add, [nix]], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[seiten_mul, [nix]], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[seiten_add, [ (-3, 1),  (-7, 0)]], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[add, [ (-9, 1)]], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [[mul, nix], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [[add, [ (-9, 1)]], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [[seiten_add, [nix]], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [[seiten_mul, [nix]], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [[seiten_add, [ (-15, 1),  (7, 0)]], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [addiert_mit_x],
        1,
        [add, [ (-9, 1)]],
        2]
```

Beispiel 2: 3x + 8 = 9x + 1 | -9x -6x + 8 = 0
u_typ([3*x+8, 9*x+1], [-6*x+8,0], [add, [(-9, 1)]] ,X).
X = [0,
0,
1,
[[add, [(-9, 1)]], nix],
[[add, [(-9, 1)]], [(9, 1), (0, 0)]],
[[seiten_add, [(-9, 1)]], nix],
[[seiten_add, [(-9, 1)]], nix],
[[add, [(-9, 1)]], [(3, 1), (8, 0)]],
[[mul, nix], [(3, 1), (8, 0)]],
[[add, [(-9, 1)]], [(3, 1), (8, 0)]],
[[seiten_add, [nix]], [(3, 1), (8, 0)]],
[[seiten_mul, [nix]], [(3, 1), (8, 0)]],
[[seiten_add, [(-3, 1), (-8, 0)]], [(3, 1), (8, 0)]],
[[add, nix], [(9, 1), (1, 0)]],
[[mul, nix], [(9, 1), (1, 0)]],
[[add, [(-9, 1), (-1, 0)]], [(9, 1), (1, 0)]],
[[seiten_add, [nix]], [(9, 1), (1, 0)]],
[[seiten_mul, [nix]], [(9, 1), (1, 0)]],
[[seiten_add, [(-15, 1), (7, 0)]], [(9, 1), (1, 0)]],
[addiert_mit_x],
0,
[falsch_umgeformt],
2]

Beispiel 3: 3x + 8 = 9x + 1 | -9 -6x + 8 = 1
u_typ([3*x+8, 9*x+1], [-6*x+8,1], [add, [(-9, 0)]] ,X).
X = [1,
0,
1,
[[add, [(-9, 0)]], nix],
[[add, [(-9, 0)]], nix],
[[seiten_add, [(-9, 0)]], nix],
[[seiten_add, [(-9, 0)]], nix],
[[add, [(-9, 1)]], [(3, 1), (8, 0)]],
[[mul, nix], [(3, 1), (8, 0)]],
[[add, [(-9, 1)]], [(3, 1), (8, 0)]],
[[seiten_add, [nix]], [(3, 1), (8, 0)]],
[[seiten_mul, [nix]], [(3, 1), (8, 0)]],
[[seiten_add, [(-3, 1), (-7, 0)]], [(3, 1), (8, 0)]],
[[add, [(-9, 1)]], [(9, 1), (1, 0)]],
[[mul, nix], [(9, 1), (1, 0)]],
[[add, [(-9, 1)]], [(9, 1), (1, 0)]],
[[seiten_add, [nix]], [(9, 1), (1, 0)]],
[[seiten_mul, [nix]], [(9, 1), (1, 0)]],
[[seiten_add, [(-15, 1), (7, 0)]], [(9, 1), (1, 0)]],

```
        [addiert_ohne_x],
        0,
        [add, [ (-9, 1)]],
        2]
```

Beispiel 4: 3x + 8 = 9x + 1 | -9x 1 = -6x + 8

```
u_typ( [3*x+8, 9*x+1], [ 1, -6*x+8], [add, [ (-9, 0)]] ,X).
X =  [1,
        1,
        0,
        [[add, [ (-9, 0)]], nix],
        [[add, [ (-9, 0)]], nix],
        [[seiten_add, [ (-9, 0)]], nix],
        [[seiten_add, [ (-9, 0)]], nix],
        [[add, nix], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[mul, nix], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[add, [ (-3, 1),  (-7, 0)]], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[seiten_add, [ (-9, 1)]], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[seiten_mul, [nix]], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[seiten_add, [ (-9, 1)]], [ (3, 1),  (8, 0)]],
        [[add, nix], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [[mul, nix], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [[add, [ (-15, 1),  (7, 0)]], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [[seiten_add, [ (-9, 1)]], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [[seiten_mul, [nix]], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [[seiten_add, [ (-9, 1)]], [ (9, 1),  (1, 0)]],
        [addiert_ohne_x],
        0,
        [seiten_add, [ (-9, 1)]],
        1]
```

6. Diagnose des Lösungsverhaltens

Sowohl die statistische Auswertung als auch weitere Berechnungen zur Ermittlung von zusätzlichen Klassifikationen erfolgte mit SPSS. Dabei wurde Wert darauf gelegt, dass diese Berechnungen in Form von SPSS-Syntax-Dateien gespeichert wurden, um entsprechende Routinen für das weiter zu entwickelnde Prologregelwerk nutzen zu können. Theoretisch hätte natürlich die Möglichkeit bestanden, diese Berechnungen gleich im Regelwerk zu implementieren. Da aber die Auswertung für den gesamten Datensatz jedesmal mehrere Tage dauerte, habe ich auf die sofortige Implementierung verzichtet. Erst zum Abschluss der Auswertungen unter zur Hilfenahme von SPSS wird endgültig klar, welche zusätzlichen Kategorisierungen nützlich und notwendig sind. Im ersten Schritt wurden Fehlermuster deklariert. Dabei war es, entsprechend der oben dargestellten Vorgehensweise und für eine Weiterentwicklung zu einem Expertensystem, wesentlich, möglichst viele Fehler so genau wie möglich zu beschreiben. Ich folge hierbei der Vorgehensweise von Hoppe (vgl. S. 62). Das bedeutet, dass zuallererst eine Feinanalyse der Fehlerkategorien erfolgen soll. Dazu werden die Schülerantworten gruppiert. Danach wird empirisch und mathematisch-inhaltlich begründet vergröbert. Dies geschieht auf zweierlei Art und Weise.

Bei der Gruppierung der Schülerantworten zeigten sich einige Schwierigkeiten. Die von Prolog erzeugten Kategorien waren bei weitem nicht ausreichend. Das hatte zur Folge, dass zwar die Ergebnisse, die durch Prolog ermittelt wurden, wertvoll waren, dass aber zusätzlich umfangreiche Berechnungen im Statistikpaket SPSS[158] erfolgen mussten. Es zeigte sich, dass die Fehler sich nicht unabhängig von der konkreten Gleichung gruppieren liessen. Das bedeutete, dass die Information über den Gleichungstyp (z. B. $Ax + B = D$ oder $B = x + D$) bei einer Feinanalyse nicht vernachlässigt werden darf. Außerdem erwies sich, dass wie erwartet die Art des Umformungshinweises, ob es sich z. B. um eine additive oder um eine multiplikative Umformung handelte, für eine Feinanalyse wichtig war. Ziel der Feinanalyse war es, auch mehrfache Fehler zu klassifizieren und „zweischrittige“ Umformungen (Umformungshinweise enthielten z. B. zwei Operationen) von einfachen („einschrittigen“) zu unterscheiden. Alles in allem wurde bei der Feinanalyse sehr deutlich, dass ohne Computereinsatz und der Ausnutzung von KEFA eine solche Kategorisierung bei der Datenfülle praktisch ausgeschlossen ist. Es wurden insgesamt über 50000 Umformungen analysiert.

Fehlertypisierungen

Folgende Tabellen sollen einen Eindruck der erkannten Fehlermuster liefern. Die automatisierte Erzeugung der Fehlergruppen durch KEFA und mittels umfangreicher SPSS-Berechnungen beinhaltete noch mehr denkbare Fehlermuster. Allerdings sind hier nur diejenigen aufgeführt, die von den Schülerinnen und Schülern tatsächlich gemacht wurden.

Die folgenden Teiltabellen 70 – 79 sollen interessierten Leserinnen und Lesern einen Eindruck von realen Schülerfehlern vermitteln. Auf quantifizierende Aus-

[158] Diese Berechnungen sind nicht SPSS-typisch und entsprechen auch nicht den Auswertungen, die üblicherweise mit Hilfe von SPSS erzeugt werden. Ziel war es, zusätzliche Klassifikationen, die eigentlich durch das Prolog-Regelwerk erzeugt werden sollten, mit SPSS nachzubilden und erst später vollständig in Prolog zu implementieren. Unter anderem wurden auf diese Art die Fehlermuster der Teiltabellen 70 – 79 als Werte einer neuen Variablen und die Fehlermuster der Teiltabellen 80 – 83 und 84 – 87 als neue Variablen ermittelt.

wertungen wird allerdings verzichtet, da ein Großteil der Fehlermuster nur äußerst selten vorkommt. Aus didaktischer Sicht ist diese Fehlersammlung weniger bedeutsam, aus Informatiksicht allerdings wesentlich. Das Expertensystem soll und muss in der Lage sein, alle möglichen Fehler so genau wie möglich zu klassifizieren. Allerdings handelt es sich bei diesen Fehlermustern um eine Fehlersammlung, die wertvolle Anregungen für z. B. kognitionstheoretisch oder mathematisch-inhaltlich Interessierte geben soll. Ferner soll hiermit die Stärke des Expertensystems dokumentiert werden.

Fehlermuster	Schülerbeispiele
additive Umformungen mit Umformungshinweis und einschrittig	
Vertauschung von Addition/Subtraktion Fehler bei Konstante auf der linken Seite	-9x – 4 = -8 | -4 -9x = -12
	-7x – 7 = -8x – 5 | +5 -7x – 12 = -8x
Vertauschung von Addition/Subtraktion Fehler bei Konstante auf der rechten Seite	6x + 1 = -8 | -1 6x = -7
	2x – 9 = 5x – 5 | +9 2x = 5x – 14
Vertauschung von Addition/Subtraktion Fehler bei x-Term auf der linken Seite	5x – 5 = 2x – 9 | -2x 7x – 5 = -9
	4x + 9 = 9x + 5 | +4x 9 = 13x + 5
Vertauschung von Addition/Subtraktion Fehler bei x-Term auf der rechten Seite	5x – 4 = -9x – 6 | -5x -4 = -4x – 6
	-6x = -7x – 1 | -7x -13x = -1
links/rechts Verwechselung von x-Term und Konstante auf beiden Seiten addiert oder subtrahiert	-2x = 3 | +3 1x = 6
	-6x = 9 | -9 -15x = 0
links/rechts Verwechselung von x-Term und Konstante auf einer Seite addiert und auf der anderen Seite subtrahiert	3x + 5 = -3x – 2 | +5 3x = +2x – 2
	2x – 8 = -7x – 4 | -8 2x = -15x – 4
links x-Term und Konstante addiert und/oder subtrahiert, rechts x-Term addiert oder subtrahiert	5x – 4 = -9x – 6 | +9x 14x – 13 = -6
	6x + 7 = 8x + 5 | -8x -2x – 1 = +5
rechts x-Term und Konstante addiert und/oder subtrahiert, links x-Term addiert oder subtrahiert	x = 5 + 4x | -4x -3x = 9
	x = 5 + 4x | -4x -3x = 1

Tabelle 70: Feínklassifikation der Fehlermuster (1. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
nur rechts richtig addiert	$-6x = 5 \quad \mid +2$ $-6x = 7$
	$-7x - 7 = -8x - 5 \quad \mid +5$ $-7x - 7 = -8x$
nur links richtig addiert	$-6x - 2 = 5 \quad \mid +2$ $-6x = 5$
	$8x + 9 = 0 \quad \mid -9$ $8x = 0$
additive Umformung mit Umformungshinweis und zweischrittig	
Vertauschung von Addition/Subtraktion Fehler bei Konstante auf der linken Seite	$2x - 8 = -7x - 4 \quad \mid -2x + 4$ $-4-8 = -7x - 2x$
	$-3x - 2 = 3x + 5 \quad \mid +3x - 5$ $3 = 6x$
Vertauschung von Addition/Subtraktion Fehler bei Konstante auf der rechten Seite	$5x - 5 = 2x - 9 \quad \mid -2x + 5$ $3x = -14$
	$4x + 9 = 9x + 5 \quad \mid -4x + 5$ $9+5 = -4x + 9x$
Vertauschung von Addition/Subtraktion Fehler bei x-Term auf der linken Seite	$-3x - 2 = 3x + 5 \quad \mid -3x - 5$ $-7 = 0$
	$-3x + 3 = -6x - 2 \quad \mid +6x \;\mid -3$ $-3x - 6x = -3-2$
Vertauschung von Addition/Subtraktion Fehler bei x-Term auf der rechten Seite	$2x - 9 = 5x - 5 \quad \mid +5x \;\mid +9$ $7x = +4$
	$3x - 8 = 9x + 1 \quad \mid -3x,-1$ $-9 = 12x$
additive Umformung ohne Umformungshinweis	
Vertauschung von Addition/Subtraktion bei Konstante	$-x + 3 = -2x - 2$ $x = 1$
	$-8x - 5 = -7x - 7$ $-8x = -7x - 12$
Vertauschung von Addition/Subtraktion bei x – Term	$-9x - 6 = 5x - 4$ $-9x + 5x = -4 + 6$
	$-7x + 4 = -6x + 5$ $-13x = 1$
Vertauschung von Addition/Subtraktion bei Konstante und bei x – Term	$3x - 8 = 9x + 1$ $12x = -8+1$
	$-3x + 3 = -6x - 2$ $-9x = 1$

Tabelle 71: Feínklassifikation der Fehlermuster (2. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
weitere additive Umformungen	
um 1 falsch addiert bei Konstante	9x + 1 = 3x – 8 | +8 9x + 8 = 3x
	4x + 9 = 9x + 5 4x + 9 – 9x – 4 = 0
um 1 falsch addiert bei Konstante mit Vertauschung von Addition/Subtraktion	8x + 5 = 6x + 7 2x = 13
	-7x – 7 = -8x – 5 | +7 -7x = -8x – 13
um 1 falsch addiert bei x-Term	9x + 1 = 3x – 8 | -3x 5x + 1 = -8
	3x – 8 = 9x + 1 | -9x -5x – 8 = 1
um 1 falsch addiert bei x-Term mit Vertauschung von Addition/Subtraktion	3x + 5 = -3x – 2 | +3x 5 = x – 2
	-3x – 2 = 3x + 5 | +2 - 3x x = 7
korrekt addiert, dann Vorzeichen geändert	-6x – 2 = -3x + 3 | +3x 3x – 2 = 3
	8x + 5 = 6x + 7 | -6x -2x + 5 = 7
Vertauschung von Addition/Subtraktion, dann Vorzeichen geändert	14x – 4 = -6 | +4 14x = 10
	-7x = 2x – 4 | -2x 5x = -4
multiplikative Umformung mit Umformungshinweis	
Vorzeichenfehler rechts	-5x = -4 | :(-5) x = -0,8
	8x = -9 | :8 x = 1,125
Vorzeichenfehler links	-6x = 9 | :6 x = 1,5
	2x = 2 | :(-2) x = -1

Tabelle 72: Feínklassifikation der Fehlermuster (3. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
Vertauschung von Multiplikation und Division links richtig, rechts Umkehroperation	$-6x = 9 \quad \mid :(-6)$ $x = -54$ $2 = -14x \quad \mid \cdot(-14)$ $-28 = x$
Vertauschung von Multiplikation und Division rechts richtig, links Umkehroperation	$-5x = 4 \quad \mid \cdot(-5)$ $x = -20$ $-3x = 5 \quad \mid \cdot(-3)$ $x = -15$
Vertauschung von Multiplikation und Division links richtig, rechts negative Umkehroperation	$-13x = 1 \quad \mid :(-13)$ $x = 13$
Vertauschung von Multiplikation und Division rechts richtig, links negative Umkehroperation	$-6x = 9 \quad \mid \cdot 6$ $x = 54$ $8x = -9 \quad \mid \cdot(-8)$ $x = 72$
Vertauschung von Multiplikation und Division Vorzeichenfehler rechts, links Umkehroperation	$-6x = 9 \quad \mid \cdot(-6)$ $x = 54$ $-14x = 2 \quad \mid \cdot(-14)$ $x = 28$
Kehrwert gebildet	$-14x = 2 \quad \mid :14$ $-x = 7$ $14x = 16 \quad \mid :14$ $x = \frac{7}{8}$
Kehrwert gebildet und Vorzeichenfehler	$2 = -15x \quad \mid :(-2)$ $7{,}5 = x$ $7x = -4 \quad \mid :7$ $x = 1{,}75$
nur links richtig multipliziert	$6x = 7 \quad \mid :6$ $x = 7$ $8x = -9 \quad \mid :8$ $x = -9$
nur links Gegenzahl multipliziert	$-6x = 9 \quad \mid :6$ $x = 9$
nur rechts richtig multipliziert	$x = 9 \quad \mid :(-6)$ $x = -1{,}5$ $-3x - 7 = +3x \quad \mid :3$ $-3x - 7 = x$
auf einer Seite das 10fache oder das 1/10fache multipliziert	$5x = 4 \quad \mid :5$ $x = 8$ $6x = -9 \quad \mid :6$ $x = -0{,}15$
auf einer Seite das –10fache oder das -1/10fache multipliziert	$6x = -9 \quad \mid :6$ $x = 0{,}15$ $-6x = 7 \quad \mid :(-6)$ $x = 0{,}116$

Tabelle 73: Feínklassifikation der Fehlermuster (4. Teil)

<table>
<tr><th>Fehlermuster</th><th>Schülerbeispiele</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Rundungsfehler</td><td>5x = -9 | :5
x = -1,2</td></tr>
<tr><td>-3x = 5 | :3
-x = $1,8\overline{8}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">arithmetischer multiplikativer Fehler</td><td>14x = 16 | :14
x = 0,9</td></tr>
<tr><td>-2000 = -1000x | :(-1000)
2000 = x</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vorzeichenfehler</td><td>-7x = -9
x = $-\frac{9}{7}$</td></tr>
<tr><td>8x = -9
x = 1,125</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rundungs– und Vorzeichenfehler</td><td>3x = -4 | :3
x = 1,25</td></tr>
<tr><td>-4x = 5 | :(-4)
x = 1,2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">arithmetischer multiplikativer Fehler mit Vorzeichenfehler</td><td>-5x = -4 | :5
-x = 1,32</td></tr>
<tr><td>3x = -5 | :3
x = $2,\overline{66}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">multiplikative Umformung mit Umformungshinweis und Seitenvertauschung</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Seitenvertauschung mit Rundungsfehler</td><td>12 = 9x | :9
x = 1,1</td></tr>
<tr><td>-14 = -3x | :3
x = 4,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Seitenvertauschung mit Vorzeichenfehler</td><td>-9 = 6x | :6
x = 1,5</td></tr>
<tr><td>3x = -4 | :3
$\frac{4}{3}$ = x</td></tr>
<tr><td>Seitenvertauschung mit Vorzeichen– und Rundungsfehler</td><td>-2 = 14x | :14
x = 0,14</td></tr>
<tr><td colspan="2">Umformung mit Umformungshinweis und Vertauschung von Addition und Multiplikation</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vertauschung von Addition und Multiplikation
rechts Kehrwert addiert, links richtig multipliziert</td><td>-5x = 5 | :-5
x = 0</td></tr>
<tr><td>4x = 9x + (-4) | :4
x = 9x</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vertauschung von Addition und Multiplikation
rechts addiert statt multipliziert, links dividiert</td><td>-1x = 2 | :(-1)
x = 1</td></tr>
<tr><td>1x = -1 | :1
x = 0</td></tr>
</table>

Tabelle 74: Feínklassifikation der Fehlermuster (5. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
Vertauschung von Addition und Multiplikation rechts Kehrwert subtrahiert, links richtig multipliziert	$-2x = -2 \quad \mid :(-2)$ $x = 0$ $2x = 2 \quad \mid :2$ $x = 0$
Vertauschung von Addition und Multiplikation rechts addiert statt multipliziert, links negativ dividiert	$-2x = -2 \quad \mid \cdot 2$ $x = 0$
Vertauschung von Addition und Multiplikation rechts richtig addiert, links dividiert	$-6x = 9 \quad \mid -6$ $x = 9 – 6$
Vertauschung von Addition und Multiplikation rechts richtig addiert, links negativ dividiert	$-6x = 9 \quad \mid +6$ $x = 15$ $-6x = 9 \quad \mid +6$ $x = 9 + 6$
Vertauschung von Addition und Multiplikation rechts Kehrwert subtrahiert, links negativ multipliziert	$-3x = 5 \quad \mid :3$ $x = 2$ $-4x = 5 \quad \mid :4$ $x = 1$
Vertauschung von Addition und Multiplikation rechts subtrahiert statt multipliziert, links negativ dividiert	$-1x = +1 \quad \mid :1x$ $x = 0$ $-1x = 1 \quad \mid :1$ $x = 0$
Vertauschung von Addition und Multiplikation rechts Kehrwert addiert, links negativ multipliziert	$-5x = 0 \quad \mid :5$ $x = 5$
Vertauschung von Addition und Multiplikation rechts subtrahiert statt multipliziert, links dividiert	$-6x = 9 \quad \mid \cdot(-6)$ $x = 15$ $-5x = -4 \quad \mid \cdot(-5)$ $x = 1$
Vertauschung von Addition und Multiplikation rechts subtrahiert statt addiert, links negativ dividiert	$3x = -4 \quad \mid -3$ $x = -1$ $-6x = 8x – 16 \quad \mid +6$ $x = 8x – 22$
Vertauschung von Addition und Multiplikation rechts subtrahiert statt addiert, links multipliziert	$-1x = -2 \quad \mid +1$ $x = -2 + 1$ $-1x = 14 \quad \mid +1$ $x = 15$
Vertauschung von Addition und Multiplikation rechts subtrahiert statt addiert, links dividiert	$-6x = 9 \quad \mid -6$ $x = 9 + 6$ $-13x = +9 \quad \mid -13$ $x = +22$
Vertauschung von Addition und Multiplikation links addiert, rechts dividiert statt multipliziert	$-2x – 14 = -3x \quad \mid \cdot(-3)$ $-5x – 14 = x$ $0 = 5x \quad \mid \cdot 5$ $5 = x$

Tabelle 75: Feínklassifikation der Fehlermuster (6. Teil)

<table>
<tr><th>Fehlermuster</th><th>Schülerbeispiele</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Vertauschung von Addition und Multiplikation
links addiert, rechts richtig multipliziert</td><td>0 = 5x | :5
5 = x</td></tr>
<tr><td>-3x – 7 = 3x | :3
-7 = x</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vertauschung von Addition und Multiplikation
links subtrahiert, rechts richtig multipliziert</td><td>16 = 14x | :14
2 = x</td></tr>
<tr><td>2x – 4 = -7x | :2x
-4 = -3,5x</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vertauschung von Addition und Multiplikation
links richtig addiert, rechts dividiert</td><td>2,5 – 2,5 – 4,5 = 2x | +2
-2,5 = x</td></tr>
<tr><td>3x + 7 = -3x | -3x
7 = x</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vertauschung von Addition und Multiplikation
links richtig addiert, rechts negativ dividiert</td><td>-9 = 6x | -6
-15 = x</td></tr>
<tr><td>4 = -9x | +9
13 = x</td></tr>
<tr><td>Vertauschung von Addition und Multiplikation
links Kehrwert addiert, rechts negativ dividiert</td><td>+7 = -6x | :+6
13 = x</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vertauschung von Addition und Multiplikation
links subtrahiert statt addiert, rechts negativ dividiert</td><td>-2 = 1,14x | -1,14
-0,86 = x</td></tr>
<tr><td>-1 = 0,85x | -0,85
-0,15 = x</td></tr>
<tr><td>Vertauschung von Addition und Multiplikation
links subtrahiert statt addiert, rechts negativ multipliziert</td><td>-2 = 1x | -1
-1 = x</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vertauschung von Addition und Multiplikation
links subtrahiert statt addiert, rechts multipliziert</td><td>1 = -1x | +1
2 = x</td></tr>
<tr><td>2 = -1x | +1
3 = x</td></tr>
<tr><td colspan="2">weitere multiplikative Umformungen</td></tr>
<tr><td rowspan="2">unvollständige Multiplikation bzw. Division</td><td>3x – 8 = 9x + 1 | :3
1x – 8 = 3x + 1</td></tr>
<tr><td>2x = -7x + 4 | :2x
x = 3,5x + 4</td></tr>
</table>

Tabelle 76: Feínklassifikation der Fehlermuster (7. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
Fehler beim Versuch durch x zu teilen	$x = -3x + \frac{8}{2} + 6 \quad \mid :x$ $x = -3 + \frac{8}{2} + 6$
	$x = -4x - \frac{6}{5} + 4 \quad \mid :x$ $x = -4 - \frac{6}{5} + 4$
Fehler beim Versuch Ax zu multiplizieren bzw. zu dividieren	$-6x = x + 16 \quad \mid :-6x$ $x = 4$
	$8x = 6x + 2 \quad \mid :2x$ $4x = 3x$
Termumformung	
Kürzungsfehler	$-\frac{7}{6} = x$ $-1{,}5 = x$
	$x = \frac{9}{8}$ $x = 1\frac{9}{8}$
Vorzeichen vergessen	$x = -\frac{2}{-1}$ $x = -2$
	$x = -\frac{9}{6}$ $x = \frac{3}{2}$
Vorzeichen vergessen bei Termumformung	$1x - 4x = 5$ $3x = 5$
	$4x - 9x = 5 - 9$ $-5x = 4$
Termumformungsfehler	$2x - 8 + 8 + 7x = -7x - 4 + 8 + 7x$ $9x = 8$
	$4x + 9 - 9 - 9x = 9x + 5 - 9 - 9x$ $-5x = 4$

Tabelle 77: Feínklassifikation der Fehlermuster (8. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
syntaktisch nicht auswertbar	
fehlende Seite, nicht zu klären ob 0 oder x gemeint	$-14x = -16 \quad \mid :14$ $x =$
	$-14x = 2 \quad \mid :14$ $x =$
	$4x = 9x \quad \mid -9x$ $-5x =$
	$9x - 8 = -4 \quad \mid +4$ $9x + 4 =$
kann nicht analysiert werden, keine Gleichung	$6x + 9 = \quad \mid -9$ $6x = -9$
	$5x - 4 = \quad \mid +4$ $5x = 4$
kann nicht analysiert werden, keine lineare Gleichung	$\frac{4x}{9} = x$ $x^2 = \frac{4}{9}$
	$\frac{x}{x} = \frac{9}{4}$ $x = \sqrt{\frac{9}{4}}$
syntaktisch nicht auswertbar	$4 = 5x \quad \mid :5$ $\frac{4}{5} = 5$
	$-8 + x = 7 \quad \mid -x$ $-8 = 7$
weitere Kategorien	
x – Terme gesammelt und berechnet	$4x + 9 = 9x + 5$ $= 4x + 9x = 13x$
	$8x + 5 = 6x + 7$ $8x + 6x = 14x$
Fehler im Zusammenhang mit 0x und 1x	$-1 = 1x \quad \mid :1$ $x = 0$
	$-1x = +1$ $x = 0$
weitere Fehler bei Ax = Cx	$4{,}44x = x$ $x = 5{,}44$
	$4x = 9x \quad \mid :4$ $x = 2{,}25$

Tabelle 78: Feínklassifikation der Fehlermuster (9. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
weitere Fehler bei x = D	$3 = 1x \quad \vert :1$ $x = \frac{2}{1}$
	$-\frac{5}{3} = x$ $x = 1,\overline{8}$
weitere Fehler bei 0x = D oder B = 0x	$0x = 7 \quad \vert :0$ $x = 0$
	$0x = 7 \quad \vert :0$ $x = \frac{7}{0}$
weitere Fehler bei 0 = Cx oder Ax = 0	$0 = 5x \quad \vert :5$ $x = 1$
	$0 = 15x \quad \vert :x$ $x = 15$
weitere Fehler bei B = Cx oder Ax = D	$6x = -9 \quad \vert :6$ $x = -10,5$
	$9 = -6x \quad \vert -6x$ $3 - 2x = 0$
weitere Fehler bei 0 = Cx + D, Ax + B = 0, 0 = Cx + Dx oder Ax + Bx = 0	$\frac{4}{3}x - x = 0$ $x = \frac{4}{3}$
	$\frac{9}{10} - \frac{8}{10}x = 0$ $x = -\frac{1}{11}$
nicht einfach klassifizierbar	
nicht klassifizierter Fehler	$9x + 5 = 4x + 9 \quad \vert -4x$ $3x + 5 = 9$
	$3x - 8 = 9x + 1$ $-7x = -9$

Tabelle 79: Feínklassifikation der Fehlermuster (10. Teil)

Die Benennung der Fehlermuster mit inhaltlich-mathematischen Beschreibungen bedeutet nicht, dass hiermit eine Deutung für das, was im Kopf der Schülerin oder des Schülers geschehen sein kann, gegeben wird[159]. Es soll also keine kognitionstheoretische Erklärung gegeben werden. Nichtsdestotrotz kann

[159] Ich habe mir lediglich Mühe gegeben, einigermaßen verständlich und damit auch nachvollziehbar, die Fehler zu beschreiben. Falls es Leserinnen oder Leser gibt, die dieses stört oder irritiert, bitte ich, die Formulierungen der ersten Spalte durch beliebige aber wohl unterscheidbare Codes zu ersetzen.

diese Feinklassifikation für kognitionstheoretisch Interessierte Informationen und Anregungen liefern.

An der letzten Teiltabelle 79 zeigt sich, dass eine Fehlermusterbeschreibung an vielen Stellen gleichungsspezifisch erfolgen musste – je nach Ausgangsgleichung.

Nach dieser Feinbeschreibung der Fehlermuster erfolgte im Sinne Hoppes eine erste Vergröberung mit dem Ziel einer empirisch begründeten Fehlertypisierung, deren Verwendung für ein adaptives Diagnosesystem oder ein tutorielles System geeignet erscheint[160]. Diese Fehlertypisierung enthält nur die syntaktisch-auswertbaren Fehler. Fehlermuster wie z. B. im Zusammenhang mit „Vertauschung von Addition und Subtraktion“ werden zusammengefasst. Die Informationen über die Lokalisierung des Fehlers (z. B.: „Fehler bei Konstante auf der linken Seite“) und über die Art des Umformungshinweises gehen allerdings dabei verloren.

Ferner ist diese Klasseneinteilung nicht mehr disjunkt, da etwa mehrfache fehlerhafte Umformungen wie z. B. „um 1 falsch addiert bei x-Term mit Vertauschung von Addition und Subtraktion“ jetzt zu zwei Fehlermustern „falsch addiert um +/-1“ und „Vertauschung von Addition und Subtraktion“ gehören.

Die folgende Grobklassifikation erlaubt also nicht mehr wie die Feinklassifikation eine Lokalisierung des Fehlers. Diese Lokalisierung scheint allerdings aufgrund der vorliegenden Daten auch nicht geeignet zu sein, statistisch auswertbare und mathematisch-inhaltlich interpretierbare Auswertungen zu liefern.

Nichtsdestotrotz gelingt es aufgrund dieses Modells ein Regelwerk eines Expertensystems zu konstruieren und damit automatische und eventuell auch adaptive Diagnosen zu erstellen.

[160] Für ein automatisches Diagnosesystem ist das genaue Klassifizieren eines Fehlers notwendig. Bei adaptiven Diagnosesystemen und tutoriellen Systemen muss zusätzlich zu der Diagnostik eine Datenbasis für weitere Aufgaben vorhanden sein. Aufgrund dieser Situation erscheint es sinnvoll, größere und damit gröbere Klassifikationen zu implementieren. Inwieweit dies tatsächlich notwendig und sinnvoll ist, wird sich erst zukünftig zeigen.

Fehlermuster	Schülerbeispiele
im Zusammenhang mit unklaren Vorstellungen zu 0 und 1	$-1x = 1x \quad \mid :1$ $x = 0$
	$-1x - 1 = 0 \quad \mid :(-1)$ $0 = x$
	$-x = +1 \quad \mid :(-x)$ $x = +1$
unvollständige Division	$3x - 8 = 9x + 1 \quad \mid :3x$ $x - 8 = 3x + 1$
	$-7x + 4 = 2x \quad \mid :2$ $-3{,}5x + 4 = x$
	$3x + 5 = -3x - 2 \quad \mid :3$ $x + 5 = -3x - \frac{2}{3}$
nur eine Seite verändert	$-6x - 2 = 5 \quad \mid +2$ $-6x = 5$
	$-7x - 4 = 2x - 8 \quad \mid +7x$ $-4 = 2x - 8$
	$-7 = 6x \quad \mid :6$ $-7 = x$
beim Versuch durch x zu dividieren oder zu multiplizieren	$-3x - 2 = +3 \quad \mid \cdot(-2x)+2$ $x = 5$
	$-3x + 14 = -2x \quad \mid :-3x$ $14 = 0{,}6x$
	$-1x + 2 = 0 \quad \mid :x$ $1 = x$
Abbruch	$8x = 6x + 7 - 5 \mid :8$ $x =$
	$-2 = 14x \quad \mid :14$ $= x$
	$6x = -9 \quad \mid :6$ $x =$
im Zusammenhang mit Seitenvertauschung	$3x = -4 \quad \mid :3$ $\frac{4}{3} = x$
	$-4 = 3x \quad \mid :3$ $x = 1{,}\overline{333}$
	$-7 = 6x \quad \mid :6x$ $x = 1{,}1\overline{66}$

Tabelle 80: Grobklassifikation der Fehlermuster (1. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
Vertauschung Addition/Subtraktion	$-2 = 6x + 5 \quad | -5$ $-3 = 6x$
	$-8 = 6x + 1 \quad | -1$ $7 = 6x$
	$6x + 1 = -8 \quad | -1$ $6x = 7$
Vertauschung Multiplikation/Division	$5x = 4 \quad | \cdot 5$ $x = 20$
	$-14x = 2 \quad | \cdot(-14)$ $x = 28$
	$= 6x = -9 \quad | \cdot 6$ $= x = -54$
Kehrwert gebildet	$-9x = -4 \quad | :9$ $x = -\frac{9}{4}$
	$6x = -7 \quad | :6$ $x = 0,8$
	$6x = -9 \quad | :6$ $x = 0,6\overline{6}$
Vertauschung Addition/Multiplikation	$-9 = 6x \quad | -6$ $-15 = x$
	$3x = 9x + 9 \quad | -3x$ $x = 6x + 9$
	$9x = 3x – 9 \quad | -9$ $x = 3x – 18$
falsch addiert um + / - 1	$-3x – 2 = 3x + 5 \quad | -3x$ $x – 2 = 5$
	$3x + 5 = -3x – 2 \quad | +3x$ $5 = x – 2$
	$-7x – 7 = -8x – 5 \quad | +5$ $-7x – 13 = -8x$
Kürzungsfehler	$6x = -9 \quad | :6$ $x = 1,25$
	$6x = -7$ $x = 0,8\overline{8}$
	$7 = -6x \quad | :-6$ $1,016\overline{6} = x$

Tabelle 81: Grobklassifikation der Fehlermuster (2. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
additiver Fehler	-9x + 3x = 9 -3x = 9
	3x + 3x = -2 – 5 9x = -7
	-3x – 3x = 5 + 2 x = 7
falsch multipliziert/dividiert +/-10	5x = 4 | :5 x = 8
	6x = -9 | :6 x = -0,15
	-6x = 7 | :(-6) x = 0,116
multiplikativer Fehler	-7 = +6x | :6 $-6\frac{1}{6}$ = x
	6x = -9 | :6 x = -0,3
	6x = -7 | :6 x = $\frac{1}{7}$
Termumformungsfehler	1 + 8 = 3x – 9x 9 = 3 – 6x
	-2 – 3 = -3x + 6x 5 = -9x
	+5 – 4 = -7x + 6x -9 = -13x
Vertauschung von x – Term und Konstante	-6x – 2 = -3x + 3 | +2 -6x = -x + 3
	-6x – 2 = -3x + 3 | -6x -2 = -3x + 3 + 6
	2x – 8 = -7x – 4 | -8 2x = -15x – 4

Tabelle 82: Grobklassifikation der Fehlermuster (3. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
x – Terme gesammelt und berechnet	-6x + 8 = 8x – 8 = -6x – 8x = 14x
	8x + 5 = 6x + 7 8x + 6x = 14x
	3x – 8 = 9x + 1 3x + 9x = 12x
Vorzeichenfehler	-2 = 14x | :14 x = 0,14
	6x = -7 x = $0{,}8\overline{8}$
	6x = -9 | :6 x = 1,25

Tabelle 83: Grobklassifikation der Fehlermuster (4. Teil)

Zur eigentlichen statistischen Auswertung wurde eine andere Vergröberung verwendet. Auch hier ist die Klasseneinteilung nicht disjunkt und die Information über die Lokalisierung des Fehlers geht ebenfalls verloren.

Ausgehend von den in Kapitel 3 beschriebenen Untersuchungen wurden die bereichsspezifischen Fehler aus mathematik-didaktischer Sicht auf wenige Fehlermuster beschränkt.

Dabei habe ich den Versuch gemacht, die Fehler grob in arithmetische und algebraische Fehler zu unterscheiden. Wichtig war mir hierbei, Fehler im Zusammenhang mit dem Vorzeichen gesondert zu erfassen und von Fehlern beim Vertauschen von Addition und Subtraktion zu unterscheiden

Fehlermuster	Schülerbeispiele
Vorzeichen falsch	$-9 = 6x \qquad \mid :6$ $1{,}5 = x$
	$6x = -9 \qquad \mid :6$ $x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
	$3x - 8 = 9x + 1 \qquad \mid -3x - 1$ $7 = 6x$
	$6x = -9$ $= \frac{9}{6}$
	$9x + 1 = 3x - 8 \qquad \mid -3x$ $-6x + 1 = -8$
	$6x = -7 \qquad \mid :6$ $x = 1{,}0166...$
Vertauschung von Addition und Subtraktion	$9x + 1 = 3x - 8 \qquad \mid -1$ $9x = 3x - 7$
	$3x + 5 = -3x - 2 \qquad \mid +5$ $3x = -3x + 3$
	$2x = -7x + 4 \qquad \mid -7x$ $-5x = 4$
	$3x - 8 = 9x + 1 \qquad \mid -9x + 8$ $12x = 9$
	$9x + 1 = 3x - 8$ $12x = -7$
Vertauschung von Multiplikation und Division	$2 = 2x \qquad \mid \cdot 2$ $4 = x$
	$-3x = 5 \qquad \mid \cdot(-3)$ $x = -15$
	$14x = 16 \qquad \mid \cdot 14$ $x = 224$
	$3x = -5 \qquad \mid \cdot 3$ $x = -15$
	$9x = 4 \qquad \mid \cdot 9$ $x = 36$
	$= 2x = 2 \qquad \mid \cdot 2$ $= x = 4$

Tabelle 84: Klassifikation der Fehler (1. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
Kehrwert gebildet	5x = 4 | :5 x = $\frac{5}{4}$
	4 = 9x | :9 2,22 = x
	5x = 4 | :5 x = $1\frac{1}{4}$
	16 = 14x | :14 $\frac{16}{14}$ = x
	-1x = -2 | :-2 x = 0,5
	5x = 4 | :4 x = 1,25
Vertauschung von Addition und Division	4 = 5x | -5 -1 = x
	2x = 2 | -2 x = 0
	2x = 2 x = 0
	6x = -9 | -6 x = -15
	-8x = -7x – 7 + 5 | +8 x = -7x – 7 + 5 + 8
	-5x = -4 | +5 x = 1
Vertauschung von x–Term mit Konstante	3x – 9 = 9x | -3x -6 = 6x
	6x + 7 = 8x + 5 | -8x -2x – 1 = +5
	2x – 9 = 5x – 5 | -5x -3x – 14 = -5
	-7x – 4 = 2x – 8 | +8 x – 4 = 10x
	3x + 5 = -3x – 2 | +5 3x = +2x – 2
	2x – 8 = -7x – 4 | -8 2x = -15x – 4

Tabelle 85: Klassifikation der Fehler (2. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
Rechenfehler	$2x - 4 = -7x \qquad \mid +7x$ $10x - 4 = 0$
	$9x = 4 \qquad \mid :9$ $x = 0,4$
	$-9 = 6x \qquad \mid :6$ $-\frac{1}{2} = x$
	$9x = 4 \qquad \mid :4$ $x = 2,85$
	$9 = -6x \qquad \mid :(-6)$ $(-1,6) = x$
	$6x = -7 \qquad \mid :6$ $x = -1,2$
nur eine Seite umgeformt	$1000x = 2000$ $x = 2000$
	$3x + 3x = -2-5$ $9x = -7$
	$0,\overline{4} = x$ $\frac{9}{4} = x$
	$2x = 2$ $x = 2$
	$5x = 2x - 4 \qquad \mid +4$ $5x = 2x$
	$-3x - 2 = 3x + 5 \qquad \mid +3$ $-3x - 2 = 5$
Bearbeitung abgebrochen	$16 = 14x \qquad \mid :14$ $= x$
	$-6x = 9 \qquad \mid \cdot(-6)$ $x =$
	$14x = +16 \qquad \mid :14$ $x =$

Tabelle 86: Klassifikation der Fehler (3. Teil)

Fehlermuster	Schülerbeispiele
weiterer algebraischer Fehler	$-3x - 2 = 3x + 5 \quad \mid +3$ $-3x - 2 = 5$
	$-6x + 16 = 8x \quad \mid :-6x$ $16 = -1{,}3x$
	$-7x - 4 = 2x - 8 \quad \mid :(-7)$ $x - 4 = 2x - 8$
	$9x - 4 = 4x \quad \mid :9$ $x - 4 = 0{,}45x$
	$8x - 2 = 6x \quad \mid :6$ $1{,}\overline{3}x - 2 = x$
	$4x = 9x - 4 \quad \mid :-4$ $x = 9x - 1$
	$-7x - 7 = -8x - 5 \quad \mid :(-7)$ $x - 7 = -8x + \frac{5}{7}$
Syntax verletzt	$-8 = 6x + 1 \quad \mid +8$ $= 6x + 9$
	$\frac{4x}{9} = x$ $x^2 = \frac{4}{9}$
	$-6x = 9 \quad \mid :(-6)$ $x - 3$
	$3x - 8 = 9x + 1$ $12x + -7$
	$3x + 5 = -3x - 2$ $x + 3$

Tabelle 87: Klassifikation der Fehler (4. Teil)

Auf Häufigkeitsangaben für die ersten beiden Klassifikationen verzichte ich, da diese weniger quantitativ sondern stärker qualitativ interessant sind – unter dem Aspekt: welche Fehler machen die Schülerinnen und Schüler, wie kann man diese so exakt wie möglich (deskriptiv) beschreiben. Dies ist unbedingt wichtig im Hinblick auf eine Weiterentwicklung zu einem Expertensystem.

Ausgehend von der letzten Grobkategorisierung erfolgen die eigentlich statistischen Auswertungen. Natürlich muss dabei beachtet werden, dass die Kategorisierungen aufgrund der vorliegenden Daten erfolgte und die damit durchgeführten Analysen im klassischen Sinne mit Vorsicht zu interpretieren bleiben.

Nichtsdestotrotz soll das vorliegende Material dazu genutzt werden, den Lösungsprozess der Schülerinnen und Schüler der Analyse zugänglich zu machen.

6.1. Auswertungen

Die folgenden Auswertungen beziehen sich auf entsprechende Tabellen, die mit Hilfe von SPSS erstellt wurden. Aus Übersichtlichkeitsgründen befinden sich diese Tabellen alle im nächsten Teilkapitel. Um die Auswertungen nachzuvollziehen, ist es notwendig, die dazu gehörenden Tabellen zu betrachten. Die Auswertungen sind so aufgebaut, dass aufgrund der Ergebnisse in einem Abschnitt weiterführende Fragestellungen mehr oder minder automatisch entstehen, denen im darauf folgenden Abschnitt nachgegangen wird. Nicht alle Ergebnisse, die den Tabellen zu entnehmen sind, werden hier dargestellt.

Verteilung der Fehler

Im folgenden Abschnitt werden Ergebnisse dargestellt, die Auskunft über die Verteilung der Fehler und die Verteilung der fehlerhaften Umformungen beim Lösungsprozess geben. Zuerst wird ein Überblick über Mehrfachfehler in einer Aufgabe gegeben. Danach wird immer nur der erste gemachte Fehler betrachtet. Die Verteilung der Fehler zu den jeweiligen Umformungsschritten wird dargelegt und analysiert.

Die Tabellen 89 – 107 geben Auskunft über die Verteilung der Fehler oder besser der fehlerhaften Umformungen beim Lösungsprozess der Schülerinnen und Schüler.

Die Tabelle 89 zeigt die Verteilung der Anzahl der Fehler je Aufgabe.

Falls Schülerinnen und Schüler die jeweilige Aufgabe nicht bearbeitet haben, ist dies in der Spalte „1 Fehler“ berücksichtigt wurden. Ferner werden nur fehlerhafte Umformungen berücksichtigt. Die Fälle, bei denen eine Schülerin oder ein Schüler die entsprechende Aufgabe bearbeitet hat, keinen Umformungsfehler gemacht hat, aber die Aufgabe nicht gelöst hat (also keine Endform der Art x = D ermittelt hat), werden hierbei nicht berücksichtigt (vgl. Tabelle 6 und 7).

Auffällig ist, dass ein Großteil der fehlerhaft gelösten Aufgaben nur einen Fehler (5013 von 6423, entspricht 79%) beinhalten. Allerdings gibt es auch einen Fall, bei dem ein Schüler bei einer Aufgabe insgesamt 5 fehlerhafte Umformungen machte.

Wenn man die Schülerinnen und Schüler betrachtet, die in den jeweiligen Aufgaben mehr als einen Fehler machten, ergibt sich folgendes Bild:

- ein Schüler macht bei allen 18 Aufgaben mehr als einen Fehler,
- drei Schülerinnen und Schüler machen bei 16 Aufgaben mehrfach Fehler,
- zwei Schülerinnen und Schüler machen bei 15 Aufgaben mehrfach Fehler,
- drei Schülerinnen und Schüler machen bei 14 Aufgaben mehrfach Fehler,
- zwei Schülerinnen und Schüler machen bei 13 Aufgaben mehrfach Fehler,

- 9 Schülerinnen und Schüler machen bei 12 Aufgaben mehrfach Fehler,
- drei Schülerinnen und Schüler machen bei 11 Aufgaben mehrfach Fehler,
- drei Schülerinnen und Schüler machen bei 10 Aufgaben mehrfach Fehler,
- 9 Schülerinnen und Schüler machen bei 9 Aufgaben mehrfach Fehler,
- 9 Schülerinnen und Schüler machen bei 8 Aufgaben mehrfach Fehler,
- 12 Schülerinnen und Schüler machen bei 7 Aufgaben mehrfach Fehler,
- 13 Schülerinnen und Schüler machen bei 6 Aufgaben mehrfach Fehler,
- 21 Schülerinnen und Schüler machen bei 5 Aufgaben mehrfach Fehler.

Insgesamt traten bei 90 Schülerinnen und Schüler (10% aller Schülerinnen und Schüler) 54% aller mehrfachen Fehler auf.

Als Ergebnis lässt sich festhalten, dass typischerweise ein einziger Fehler für einen Misserfolg beim Lösen von linearen Gleichungen verantwortlich ist. Aufgrund von fehlerhaften Umformungen kann allerdings der weitere Lösungsprozess komplizierter werden, und damit können Folgefehler induziert werden.

Dementsprechend wird im Folgenden immer nur der erste gemachte Fehler betrachtet, weitere Fehler werden nicht berücksichtigt.

Tabelle 90 gibt Auskunft darüber, in welchem Umformungsschritt die Schülerinnen und Schüler das erste Mal eine fehlerhafte Umformung durchführen. Am häufigsten geschieht dies bei der ersten Umformung (3048 von 6423, entspricht 47%). Dies lässt vermuten, dass die erste Umformung diejenige ist, die für den Lösungserfolg entscheidend ist.

Allerdings muss berücksichtigt werden, dass die Aufgaben individuell unterschiedlich gelöst werden. Die Sonderaufgaben $-8 + x = 7$ und $-6x = 9$ sind sicherlich in einem Schritt lösbar, während andere Aufgaben aufgrund ihrer Komplexität üblicherweise mehr Umformungsschritte verlangen.

Über die Verteilung der Umformungsschritte gibt Tabelle 91 Auskunft.
- 0 Zeilen bedeutet in dieser Tabelle, dass die Aufgabe nicht bearbeitet wurde;
- 1 Zeile bedeutet, dass bei der Aufgabe bei der vorgebenen Aufgabenzeile noch etwas notiert wurde (z. B. ein Umformungshinweis), aber keine umgeformte Gleichung auftritt;
- 2 Zeilen bedeutet, dass eine Umformung ausgeführt wurde.

Der Modalwert für die verschiedenen Aufgaben ist der Tabelle 91 zu entnehmen.

Um eine Vergleichbarkeit der Verteilung der Fehler bei den Umformungsschritten zu erzeugen, ist es nicht sinnvoll, die Zeile, in der die fehlerhafte Umformungen geschehen ist, sondern die Umformungen (unterschieden in erste Umformung, mittlere Umformung und letzte Umformung) zu betrachten.

Das bedeutet, dass in der Gruppe „mittlere Umformung“ sowohl die zweite, als auch die dritte Umformung subsumiert werden, wenn z. B. insgesamt 4 Umformungen zu einem Lösungsprozess gehören.
Falls nur eine Umformung gemacht wurde, wird dies gesondert betrachtet.

Tabelle 92 zeigt die Verteilung aller gemachten Fehler auf diese Umformungsschritte.

Hier wird deutlich, dass nicht, wie oben vermutet, die erste Umformung am fehleranfälligsten ist, sondern die letzte Umformung.
Nur bei der Sonderaufgabe x = 5 + 4x ist die erste Umformung am fehleranfälligsten. Die Kreuztabellen 93 und 94 zeigen dies ebenfalls. In der Tabelle 94 werden nur die Fälle betrachtet, bei denen mehr als eine Umformung gemacht wurde. Die folgende Abbildung zeigt das zur Kreuztabelle 93 gehörende Balkendiagramm.

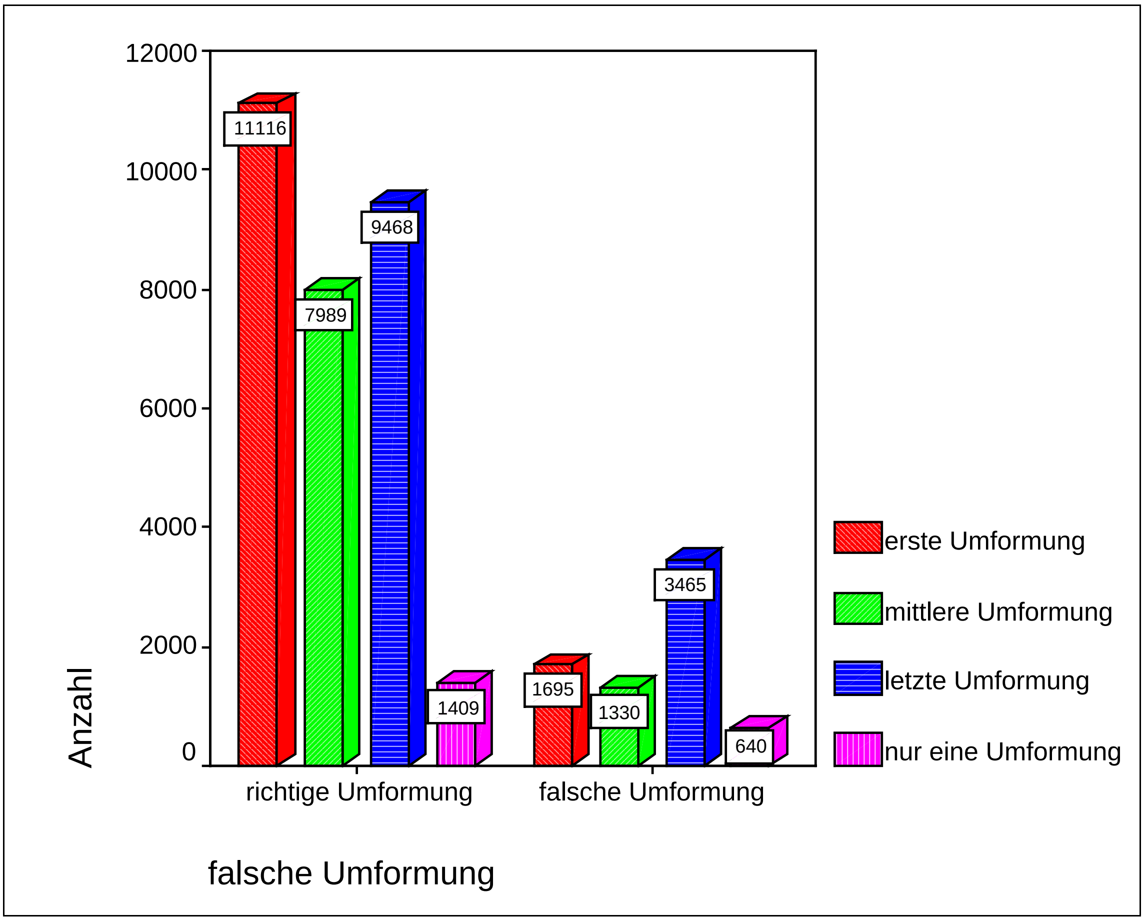


Abbildung 66: Umformungserfolg in Abhängigkeit vom Umformungsschritt

Die Tabellen 95 und 96 zeigen die Verteilung der Fehler je Umformungsschritt nur unter Berücksichtigung des ersten gemachten Fehlers.
Diesmal werden nicht nur Fehler berücksichtigt, sondern auch, ob die Aufgabe richtig gelöst wurde. Wenn bei einem Umformungsschritt das weitere Lösen

abgebrochen wurde, obwohl noch keine Endform erreicht wurde, wurde dies bei dem entsprechenden Umformungsschritt als Fehler zugerechnet.

Die Tabellen 97 und 98 zeigen die Verteilung unter Berücksichtigung der Fälle, bei denen mehr als eine Umformung gemacht wurde.

Sowohl bei der ersten Umformung als auch bei der letzten Umformung werden die meisten Fehler gemacht.

Die folgenden Tabellen dienen der Klärung der Frage, inwieweit dies vom Schwierigkeitsgrad der Aufgaben abhängig ist.

Bei den ersten Auswertungen in Kapitel 4 war bereits die Abhängigkeit des Lösungserfolgs vom Zahlenraum der Lösung dargestellt wurden.

Da keine Einstufung der Aufgaben in Schwierigkeitsgrade im Vorfeld der Untersuchung, wie bereits mehrfach dargelegt, möglich war, soll als Merkmal für die (empirische) Schwierigkeit der Lösungserfolg dienen.

Dazu werden die Aufgaben (siehe Tabellen 99 bis 101) nach dem Lösungserfolg in drei Gruppen eingeteilt.
Die Aufgaben $-3x - 2 = 3x + 5$ aus Test A und $5x - 5 = 2x - 9$ aus Test B haben jeweils den Lösungserfolg 46,2%. Aus Gleichgewichtsgründen bzgl. Test A und Test B wird die Aufgabe $-3x - 2 = 3x + 5$ aus Test A in die schwere Gruppe und die Aufgabe $5x - 5 = 2x - 9$ aus Test B in die mittlere Gruppe eingeteilt (siehe Tabelle 101). Daraus folgt u. a., dass die Aufgaben der leichten Gruppe im wesentlichen natürliche Zahlen als Ergebnis besitzen.

Aus Tabelle 102 ist zu entnehmen, dass der erste Fehler bei den leichten Aufgaben am häufigsten im ersten Umformungsschritt gemacht wird und bei den mittleren und schweren Aufgaben dagegen im letzten Umformungsschritt.

Tabelle 103 gibt eine Gesamtübersicht über die Verteilung der Anzahl der Fehler mit Berücksichtigung der Länge des gesamten Lösungsprozesses.
Dargestellt werden nur die Fälle, bei denen mindestens eine Umformung gemacht wurde, also ein Prozess des Lösens überhaupt stattfand.

Bei Aufgaben, die mit einer Umformung gelöst werden, ist dies in 1407 Fälle erfolgreich und in 642 Fällen nicht erfolgreich geschehen, dies entspricht einem Anteil von 68% Lösungserfolg.
Bei Aufgaben, die mit zwei Umformungen gelöst werden, ist dies in 3300 Fälle erfolgreich und in 1796 Fällen nicht erfolgreich geschehen, dies entspricht einem Anteil von 65%.
Bei Aufgaben, die mit drei Umformungen gelöst werden, ist dies in 3607 Fälle erfolgreich und in 2706 Fällen nicht erfolgreich geschehen, dies entspricht einem Anteil von 57%.

Bei Aufgaben, die mit vier Umformungen gelöst werden, ist dies in 719 Fälle erfolgreich und in 502 Fällen nicht erfolgreich geschehen, dies entspricht einem Anteil von 59%.
Bei Aufgaben, die mit fünf Umformungen gelöst werden, ist dies in 87 Fälle erfolgreich und in 78 Fällen nicht erfolgreich geschehen, dies entspricht einem Anteil von 53%.
Bei Aufgaben, die mit sechs Umformungen gelöst werden, ist dies in 9 Fälle erfolgreich und in 2 Fällen nicht erfolgreich geschehen.
Bei Aufgaben, die mit sieben Umformungen gelöst werden, ist dies in 4 Fälle erfolgreich und in einem Fall nicht erfolgreich geschehen.

Damit wird deutlich, dass mit der Anzahl der gemachten Umformungen (also der Länge des Lösungsprozesses) die Möglichkeit, mehrfache Fehler zu machen, ansteigt. Es ist aber nicht zu erkennen, dass mehr Umformungen zu einem besseren Lösungserfolg führen; also z. B. das Notieren von mehr Zwischenschritten erfolgreicher ist. Allenfalls ist zu erkennen, dass das Lösen in einem Schritt erfolgreicher ist. Dies betrifft aber, wenn man die Tabelle genauer betrachtet, im Wesentlichen die Sonderaufgaben $-8 + x = 7$ und $-6x= 9$.

Die Tabellen 104 bis 106 geben Auskunft darüber, welche Arten von Fehlern gemacht wurden. Dazu wird die Fehlerklassifikation aus Tabelle 87 verwendet. Zu beachten ist, dass aufgrund dieser Fehlerklassifikation nicht alle Fehler erkannt werden und dass die Einteilung nicht disjunkt ist. Außerdem wird hier wieder nur der erste auftretende Fehler berücksichtigt.

Auffällig ist, dass am häufigsten bei einem Großteil der Aufgaben der Vorzeichenfehler auftritt. Danach folgen Vertauschung von Addition und Subtraktion, Rechenfehler, Vertauschung von Addition und Division und der Kehrwertfehler.

Beim Vergleich der Sonderaufgaben $-8 + x = 7$ und $-6x = 9$ in Test A und Test B fällt auf, dass zwar im Test B die Gesamtfehlerquote geringer ist, dass aber der sogenannte Konkatenationsfehler, der Fehler durch Vertauschung von Addition und Division auch bei $-6x = 9$ in Test B, also bei der letzten Aufgabe dominierend ist. Im Test A wird dieser Fehler insgesamt 295 mal gemacht, im Test B nur 196 mal als erster Fehler. Das steht im Widerspruch zu der Annahme, dass durch die frühzeitige Präsentation dieser Aufgaben bei den Schülerinnen und Schülern ein Lerneffekt dadurch auftritt, dass die Schülerinnen und Schüler geradezu auf dieses Problem hingewiesen werden und damit im weiteren Verlauf des Tests dieser Fehler deutlich seltener auftritt.
Stattdessen scheint das Umgekehrte eine Erklärung zu sein. Die Schülerinnen und Schüler werden durch diese Aufgaben dazu „verführt“, diesen Fehler überhaupt erst zu machen.

Beachtet werden muss allerdings, dass durch die Koeffizientenwahl eine Lösung $x = 15$ für beide Aufgaben impliziert werden kann. Nichtsdestotrotz ist dieser große Misserfolg auffällig und könnte unterrichtspraktisch wichtig sein.

Wenn solch eine Situation tatsächlich typisch ist, durch bestimmte Aufgabensequenzen Fehler also erst erzeugt werden, hätte dies Auswirkungen auf den Unterricht und auch auf die mathematikdidaktischen Lerntheorien. Die Auswahl der Aufgaben sowohl im Unterricht als auch im Schulbuch müsste z. B. genauer analysiert werden, und es wäre wünschenswert, dass der Bereich der Aufgabenkonstruktion dann stärker in den Forschungsmittelpunkt rücken würde.

Tabelle 106 zeigt, dass beim ersten und bei den mittleren Umformungsschritten unabhängig vom Vorzeichenfehler die Vertauschung von Addition und Subtraktion dominiert und im letzten Umformungsschritt Rechenfehler, fehlerhafte Kehrwertbildung und Vertauschung von Addition und Division überwiegen.
Das bedeutet, dass beim Lösungsprozess am Anfang additive Umformungen für Fehler verantwortlich sind. Dies lässt sich eventuell damit erklären, dass die Schülerinnen und Schüler Äquivalenzumformungen statt mit „auf beiden Seiten das gleiche tun" mit „Rüberbringen" interpretieren.

Zum Schluss des Lösungsprozesses spielen additive Umformungen keine große Rolle mehr. Stattdessen führt das Teilen durch den Koeffizienten vor dem x zu großen Problemen.

Ferner ist auffällig, dass die Häufigkeit der fehlerhaften Umformung, bei der nur eine Seite verändert wird, mit den Umformungsschritten deutlich ansteigt.
Dies könnte ein Indiz dafür sein, dass die Schülerinnen und Schüler im Sinne der bug-repair-theory wissen, dass sie eine Form der Art x = D erzeugen müssen um die Grundidee zum Lösen von linearen Gleichungen umzusetzen, und dementsprechend eine eventuelle Lücke im Lösungsalgorithmus dadurch „reparieren", dass sie im letzten Schritt beim Umformen von Ax = D einfach x = D notieren.

Zusammenfassung:
Ca. 10% aller Schülerinnen und Schüler sind für 54% aller mehrfachen Fehler in einer Aufgabe verantwortlich. Die erste Umformung ist die fehleranfälligste. Daher lässt sich vermuten, dass individuelle Lösungsstrategien über Erfolg oder Misserfolg entscheiden. Die häufigsten Fehler sind Vorzeichenfehler und Vertauschung von Addition und Subtraktion. Der sogenannte Konkatenationsfehler (Vertauschung von Addition und Division) tritt erst an vierter Stelle auf. Es lässt sich vermuten, dass es Fehler und Fehlvorstellungen gibt, die durch Präsentation von Aufgaben, die auf diese Fehlvorstellung hinweisen sollen, erst erzeugt werden. Ferner lässt sich vermuten, dass die unterrichtliche Behandlung von Äquivalenzumformungen statt von Elementarumformungen für eine große Anzahl von Fehlern verantwortlich ist.

Fehler im Zusammenhang mit Umformungsstrategien

Welche Rolle spielen die Ideen und Strategien, die die Schülerinnen und Schüler zum Lösen der Gleichungen verwenden? Dies soll im folgenden Abschnitt untersucht werden.

Tabelle 107 zeigt bei welcher Umformungsstrategie der erste gemachte Fehler auftritt. Diese Tabelle liefert Rückschlüsse darüber, was die Schülerin oder der Schüler intendiert (z. B. „x-Term nach rechts bringen") und dann fehlerhaft ausgeführt hat. Selbstverständlich kann hiermit der Großteil der Schülerintentionen noch nicht erkannt werden. Dies soll erst mit der Weiterentwicklung von KEFA und dem dazu gehörenden Regelwerk automatisch erfolgen. Insoweit ist dies ein erster Anhaltspunkt für die Stärke bzw. Schwäche des bisherigen Regelwerks.

Tabelle 108 gibt Auskunft über die Verteilung der Anfangsstrategien (Grundstrategien). Hieran lässt sich erkennen, dass bei der Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler vermutlich eine Standardstrategie zum Lösen von linearen Gleichungen angewendet wird. Die absoluten Häufigeiten für „x-Term nach links" und „Konstante nach rechts" als erste Umformung deuten auf solch ein algorithmisiertes Lösungsverhalten hin.

Im Gegensatz zu solch einer Standardstrategie soll als „günstige Strategie" Folgendes bezeichnet werden.
Beispiel: Aufgabe 3 aus Test A lautet:

$$3x - 8 = 9x + 1$$

Wird bei der ersten Umformung der Term 3x im Sinne der Elementarumformungsregeln „rübergebracht" oder im Sinne der Äquivalenzumformungen der Term -3x auf beiden Seiten addiert (oder der Term 3x auf beiden Seiten subtrahiert), entsteht die Gleichung

$$-8 = 6x + 1$$

Damit muss im letzten Umformungsschritt durch keine negative Zahl dividiert werden.

Dieses Erzeugen eines positiven Faktors vor dem x-Term soll als „günstige Strategie" bezeichnet werden. Statt einen (einfachen) Algorithmus zum Lösen von linearen Gleichungen zu verwenden („erst das mit x auf die linke Seite, dann das ohne x auf die rechte Seite und dann teilen"), verlangt dies eine zusätzliche Überlegung („entscheide, wo das mit dem x hinsoll, und zwar so, dass dies positiv wird").

Die bisherigen Auswertungen zeigen die besondere Fehleranfälligkeit des letzten Umformungsschrittes und die dominierende Rolle des Vorzeichenfehlers. Falls Schülerinnen und Schüler einen individuellen Lösungsprozess zum Vermeiden der fehleranfälligen Division durch eine negative Zahl besitzen, könnte dies den Lösungserfolg verbessern.

Darüber geben die Tabellen 109 bis 116 Auskunft. Zur Erläuterung der umfangreichen Tabelle 109 soll folgender Ausschnitt dienen.

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	4x+9=9x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	42	
								Anzahl in Prozent	9,5%	
							x-Term nach links	Anzahl	62	
								Anzahl in Prozent	14,1%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	44	
								Anzahl in Prozent	10,0%	
							Konstante nach links	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	5,9%	
							anderes	Anzahl	23	
								Anzahl in Prozent	5,2%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		99
								Anzahl in Prozent		22,4%
							x-Term nach links	Anzahl		89
								Anzahl in Prozent		20,2%
							Konstante nach rechts	Anzahl		23
								Anzahl in Prozent		5,2%
							Konstante nach links	Anzahl		31
								Anzahl in Prozent		7,0%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
Gesamt	Anzahl								197	244

Tabelle 88: Lösungserfolg in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie

Bei der Aufgabe 4x + 9 = 9x + 5 ist die günstige Strategie „x-Term nach rechts“. 99 der 441 Schülerinnen und Schüler haben diese Anfangsstrategie erfolgreich angewandt, 42 Schülerinnen und Schüler waren nicht erfolgreich mit dieser Anfangsstrategie. 89 Schülerinnen und Schüler waren mit der Standardstrategie „x-Term nach links“ erfolgreich und 62 Schülerinnen und Schüler nicht erfolgreich. Die Erfolgsquote war somit bei dieser Aufgabe beim Verwenden der günstigen Strategie im Gegensatz zu der Standardstrategie deutlich besser.

Die Tabelle 109 gibt Auskunft über alle Aufgaben. Dabei ist zu berücksichtigen, dass nur bei den Aufgaben, bei denen die günstige Strategie „x-Term nach rechts“ lautet, Unterschiede zu erkennen sind. Auffälligkeiten sind in der Tabelle hervorgehoben.

Anhand dieser Tabelle lässt sich vermuten, dass das Verwenden von günstigen Strategien erfolgversprechender ist als das Verwenden der Standardstrategie.

Zur Klärung dieser Fragestellung wird folgende Gruppierung vorgenommen. Die Schülerinnen und Schüler werden aufgrund der trennenden Aufgaben aufgeteilt in diejenigen,

- die in allen trennenden Aufgaben die Standardstrategie immer anwenden,
- die in allen trennenden Aufgaben die Standardstrategie niemals anwenden,
- die in allen trennenden Aufgaben die günstige Strategie immer anwenden
- die in allen trennenden Aufgaben die günstige Strategie niemals anwenden.

Der Lösungserfolg für diese 4 Gruppen bei allen Aufgaben ist in den Tabellen 110 bis 113 abzulesen. Wichtig ist, dass diese Gruppenbildung nicht disjunkt ist und es auch Schülerinnen und Schüler gibt, die bei dieser Gruppenbildung nicht berücksichtigt werden.

Die Schülerinnen und Schüler aus der Gruppe „immer die günstige Strategie" sind am erfolgreichsten, gefolgt von der Gruppe „immer die Standardstrategie", dann von der Gruppe „niemals die günstige Strategie" und zum Schluss „niemals die Standardstrategie".

Solche Lösungsstrategien können unterrichtlich thematisiert worden sein. Dies ist typischerweise bei der Standardstrategie zu erwarten. Dann müssten sich Klasseneffekte zeigen. Die damit verknüpfte Frage ist, inwieweit eine unterrichtliche Behandlung unabhängig von dem individuellen Erfolg für die Gesamtheit erfolgversprechend ist. Darüber sollen die Tabellen 114 bis 116 Auskunft geben.

Tabelle 114 zeigt den Lösungserfolg auf Klassenebene, abhängig von der für die entsprechende Aufgabe verwendeten Strategie. Dabei zeigt sich ebenfalls, dass die Verwendung der günstigen Strategie erfolgreicher als die Standardstrategie ist.

Durch Bildung von Gruppen für die Klassen kann man einen Mittelwertvergleich und den T-Test durchführen und somit Klasseneffekte aufzeigen.

Die Klassen werden auf folgende drei Gruppen aufgeteilt:

- Klassen, in denen bei den trennenden Aufgaben in mehr als 50% der Fälle die günstige Strategie angewendet wurde,
- Klassen, in denen bei den trennenden Aufgaben in mehr als 50% der Fälle die Standardstrategie angewendet wurde und
- Klassen, bei denen keine ausgeprägte Strategie erkennbar ist.

Der Mittelwertvergleich und der T-Test (Tabelle 115) zeigen, dass die Klassen, bei denen die günstige Strategie dominiert, höchstsignifikant erfolgreicher sind als die Klassen, bei denen die Standardstrategie oder keine ausgeprägte Strategie dominiert. Allerdings muss hierbei beachtet werden, dass diese Gruppeneinteilung sicherlich sinnvoll erscheint, aber nichts darüber aussagt, inwieweit Strategien im Unterricht tatsächlich behandelt wurden. Auch wenn der

T-Test zeigt, dass der Unterschied im Lösungserfolg auf einem Signifikanzniveau von 0,999 nicht zufällig ist, muss beachtet werden, dass die zugrunde liegende Gruppenbildung mehr oder weniger willkürlich ist. Eine Einteilung könnte z. B. auch über die Schülerinnen und Schüler und nicht auf Klassenebene über die trennenden Aufgaben erfolgen.
Hieraus kann man also nur eine Hypothese ableiten, die mit weiteren Untersuchungen überprüft werden muss. Ferner besteht die Notwendigkeit, den konkreten Unterricht in die Untersuchung miteinzubeziehen.

Die Kreuztabelle 116 zeigt nochmals Schülergruppen bezüglich des Lösungserfolgs. Analog zu den bisher gebildeten Gruppen werden hierbei zwei weitere Gruppen gebildet: eine Gruppe mit Schülerinnen und Schülern, die weder die günstige noch die Standardstrategie bei den trennenden Aufgaben verwenden und die restlichen Schülerinnen und Schüler, die sowohl die Standardstrategie als auch andere Strategien (auch die günstige) verwenden.

Diese Gruppeneinteilung ist disjunkt und beinhaltet alle Schülerinnen und Schüler.

Dazu gehört folgendes Balkendiagramm.

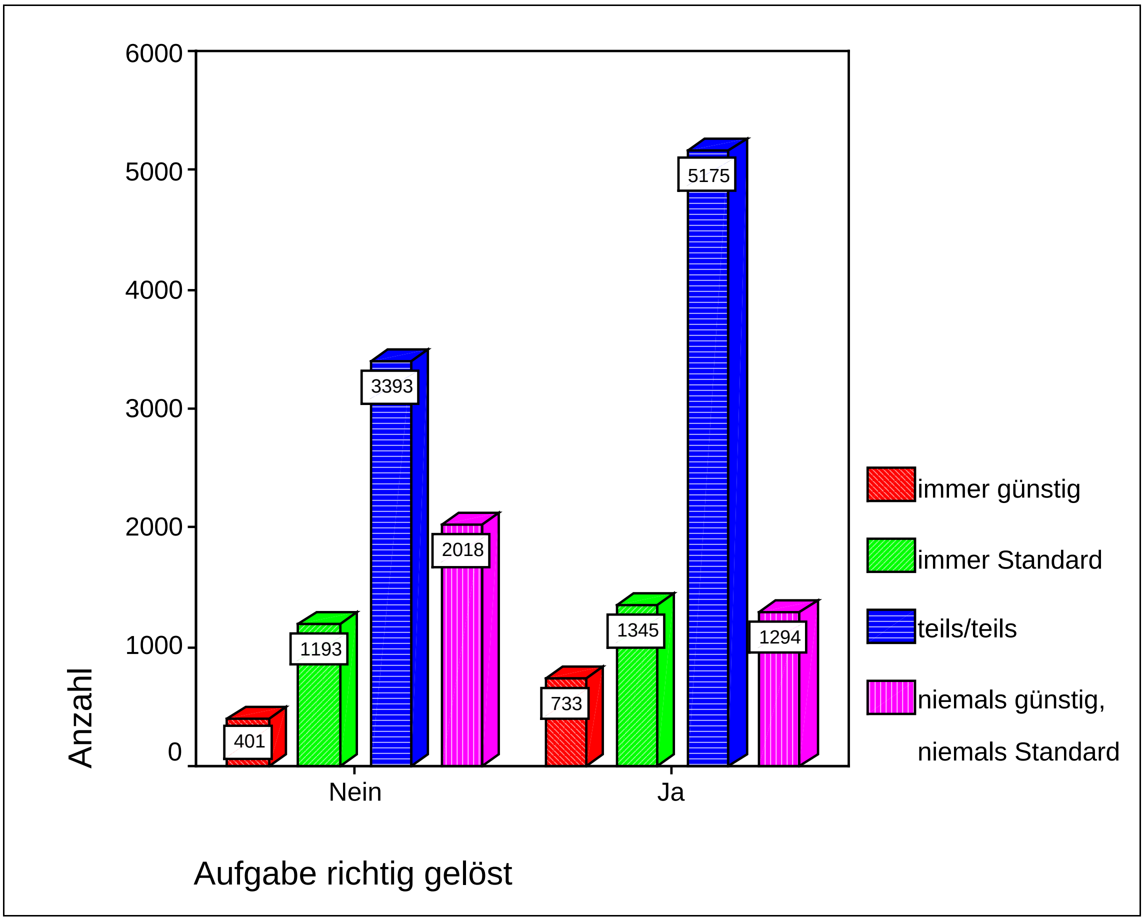


Abbildung 67: Lösungserfolg in Abhängigkeit von der verwendeten Strategie

Auch hier zeigt sich wieder deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler, die „günstig“ vorgehen, erfolgreicher sind. Am Schlechsten ist der Lösungserfolg bei den Schülerinnen und Schülern, die niemals nach einer der beiden Strategien vorgehen. Dieser Unterschied ist ebenfalls höchstsignifikant.

Zusammenfassung:
Anhand des Datenmaterials lässt sich vermuten, dass bei der Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler wahrscheinlich eine Standardstrategie zum Lösen von linearen Gleichungen angewendet wird. Die Auswertungen zeigen die besondere Fehleranfälligkeit des letzten Umformungsschrittes und die dominierende Rolle des Vorzeichenfehlers. Es zeigt sich deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler, die „günstig“ vorgehen, also Minuszeichen im letzten Umformungsschritt vermeiden, erfolgreicher sind, als die, die typisch-algorithmisch („zuerst das mit x auf die linke Seite“) vorgehen. Am Schlechtesten ist der Lösungserfolg bei den Schülerinnen und Schülern, die niemals nach einer der beiden Strategien vorgehen.

Umformungsfehler im Zusammenhang mit der Gleichungsform

Die folgenden Auswertungen sollen einen Überblick über den Schwierigkeitsgrad der umzuformenden Gleichungen und Gleichungsformen geben. Größtenteils werden Tabellen präsentiert, die es erlauben, eine Vielzahl an weiteren Forschungsfragen abzuleiten. Zum Abschluss wird das Augenmerk auf die zeitliche Konsistenz gerichtet.

Tabelle 117 zeigt die absoluten Häufigkeiten der Gleichungen, die in der Untersuchung auftraten. Hierbei wurden allerdings nicht alle Gleichungen berücksichtigt, sondern nur diejenigen Gleichungen, die im Test mehr als 100 mal vorkamen. Das bedeutet, dass alle Aufgabenstellungen als Gleichungen berücksichtigt wurden, da diese häufiger als 400 mal auftreten mussten. Außerdem sind die Gleichungen berücksichtigt, die beim Lösen für die Gesamtheit mindestens 100 mal auftraten.

Tabelle 118 zeigt die absoluten Häufigkeiten der Gleichungsformen, die zu den ausgewählten Gleichungen gehören.

Die Tabellen 119 und 120 zeigen die entsprechende Fehlerquote für diese Gleichungen und Gleichungsformen. Die Tabellen sind absteigend sortiert.

Hierbei geht es nicht mehr um den Lösungserfolg einer Aufgabe, sondern um den Umformungserfolg für eine konkrete Gleichung. Diese Gleichung kann in der ersten Zeile, aber auch in jeder weiteren Zeile beim Lösungsprozess einer Aufgabe auftreten.

Die fehleranfälligste Gleichungsform $x = D + Cx$ besteht nur aus der Gleichung $x = 5 + 4x$ und zeigt die bereits oben behandelte Problematik bei dieser Sonderaufgabe.

Durch die Fehlerquote von 27% bzw. 21% bei den Gleichungsformen $Ax = D$ bzw. $B = Cx$ wird nochmals deutlich, dass der letzte Umformungsschritt am problematischsten ist.

Die Fehlerquoten für die Gleichungsformen mit einer 0 auf einer Seite deuten daraufhin, dass auch hier, wie in anderen schulmathematischen Bereichen, die Null eine besondere Schwierigkeit darstellt.

Tabelle 120 zeigt, dass die am häufigsten umgeformte Gleichung -6x = 9 einen Fehleranteil von 40% aufweisst, während die Gleichung 6x = -9 nur einen Fehleranteil von 25% besitzt.

Dies soll mit den folgenden Tabellen noch genauer betrachtet werden.

Die Kreuztabelle 121 und das folgende Balkendiagramm zeigen den höchstsignifikanten Unterschied für diese beiden Gleichungen.

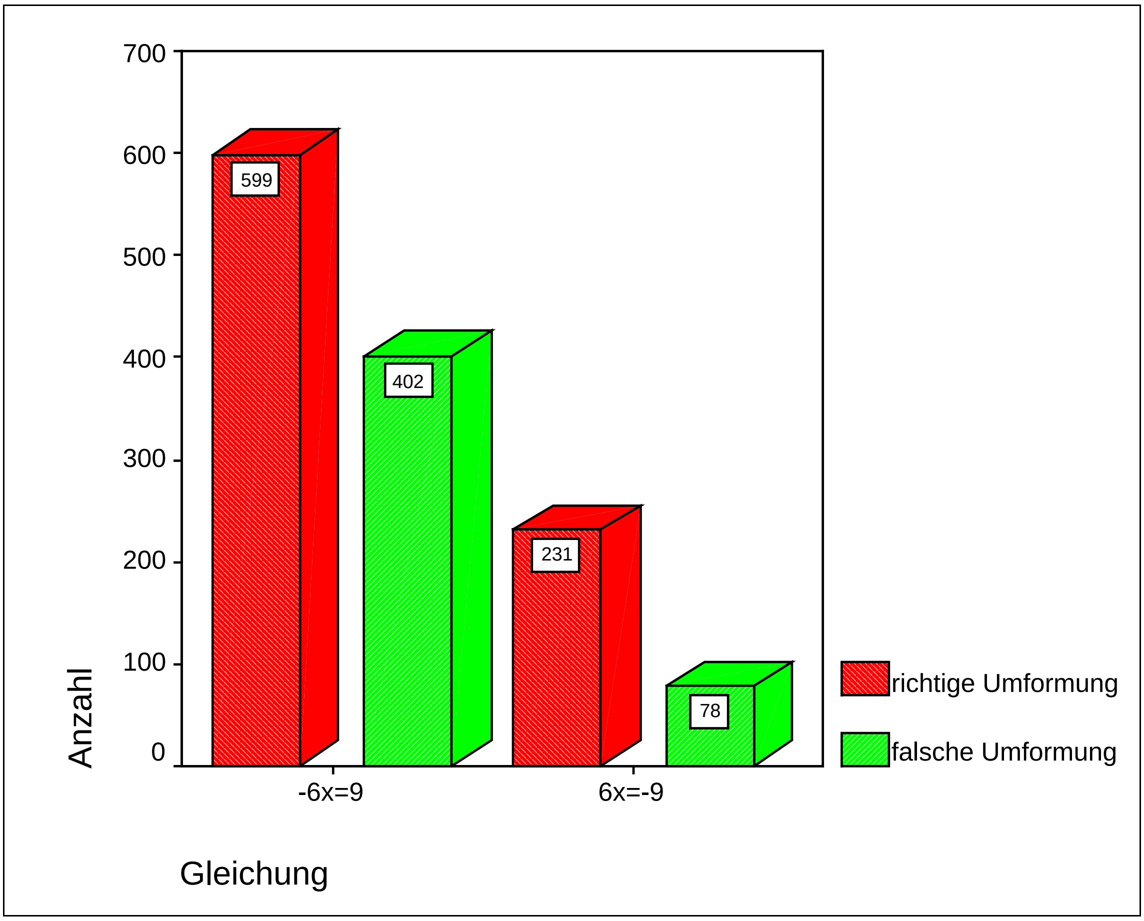


Abbildung 68: Umformungserfolg bei den Gleichungen –6x=9 und 6x=–9

Tabelle 122 gibt Auskunft über die Fehlerklassifikation bei Umformungen der Gleichung -6x = 9. Die Umformungen werden in der durch Delphi erzeugten Syntax dargestellt, sollten aber selbsterklärend sein.

Diese Tabelle soll außerdem dokumentieren, wie genau der Auswertungsprozess mit Hilfe des Einsatzes des Computers in Verbindung mit Delphi, Prolog und SPSS ist und welche Möglichkeiten bei einer solchen Vorgehensweise bestehen.

Die nächste Tabelle soll Auskunft über die Konsistenz von Fehlern geben. Dazu wurden die Schülerinnen und Schüler ausgewählt, die beim Test die Gleichung -6x = 9 zweimal umformten und mindestens eine dieser Umformungen fehlerhaft war.

Tabelle 123 zeigt die von diesen Schülerinnen und Schülern durchgeführten Umformungen.

Insgesamt machten 75 Schülerinnen und Schülern bei der zweimal behandelten Gleichung -6x = 9 mindestens einmal eine fehlerhafte Umformung. Von diesen 75 Schülerinnen und Schülern machten lediglich 25 den gleichen Fehler zweimal, 31 Schülerinnen und Schüler formten einmal richtig und einmal falsch um, und 19 Schülerinnen und Schüler machten zwei unterschiedliche Fehler. Das bedeutet, dass die Konsistenz bei diesem Fehler sehr gering ist.

74 Schülerinnen und Schüler bearbeiteten den Test A und ein Schüler den Test B. Beim Test A waren die betroffenen Aufgaben die zweite und die dritte Aufgabe. Wenn man unterstellt, dass die Schülerinnen und Schüler den Test in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeiteten, bedeutet dies, dass diese Gleichung innerhalb von drei Minuten zweimal umgeformt wurde. Hierdurch wird die sehr geringe Konsistenz des Fehlers noch deutlicher.

Mit diesem Ergebnis wird der „psychologische" Ansatz mit qualitativen Untersuchungen (Einzelfallstudien) zur Fehleranalyse bei syntaktischen, algorithmischen Fragestellungen im Bereich der Schulmathematik zumindest fragwürdig, wenn nicht sogar unhaltbar.
Es erscheint sinnlos, bei einem Schüler die Ursachen eines Fehlers zu analysieren, wenn dieser Schüler nach kurzer Zeit diesen Fehler gar nicht mehr macht.

Der hohe Fehleranteil von 19% bei der Umformung der Gleichung 1000x = 2000 aus Tabelle 121 deutet schon auf das Problem im Zusammenhang mit dem Zahlenraum der Koeffizienten der Sonderaufgabe 3000x + 4000 = 2000x + 6000 hin. Wie Tabelle 33 bereits zeigte, war diese Aufgabe die am schlechtesten gelöste Aufgabe aus der Gruppe mit natürlichen Zahlen als Ergebnis. Bei der Gruppierung (vgl. Tabelle 99) nach dem Lösungserfolg befindet sie sich dementsprechend auch nur in der mittleren Gruppe.

Die Tabelle 124 zeigt die von den Schülerinnen und Schülern ermittelten Endergebnisse. Von 323 falschen Lösungen stammen 149 Endergebnisse aus dem Tausenderzahlenraum.

Dies bestätigt die Vermutung, dass dieser Zahlenraum im Unterricht kaum beachtet wird und die Schülerinnen und Schüler hiermit erhebliche Probleme haben.
Unterrichtspraktisch kann dies bedeuten, dass damit eine stärkere Anwendungsorientierung für einen Großteil der Schülerinnen und Schüler erhebliche

Schwierigkeiten erzeugt, weil die Daten und die Zahlen, die der Realität entnommen werden, äußerst selten aus dem Zahlenraum [-20, 20] stammen.

Zusammenfassung:
Von 75 Schülerinnen und Schülern machten bei der Umformung der Gleichung $-6x = 9$ lediglich 25 den gleichen Fehler zweimal, 31 Schülerinnen und Schüler formten einmal richtig und einmal falsch um und 19 Schülerinnen und Schüler machten zwei unterschiedliche Fehler. Falls es keine Rolle spielt, ob die Gleichung als Aufgabenstellung oder erst nach einer Anzahl von Umformungen auftritt, wird der „psychologische" Ansatz mit qualitativen Untersuchungen (Einzelfallstudien) zur Fehleranalyse bei syntaktischen, algorithmischen Fragestellungen im Bereich der Schulmathematik zumindest fragwürdig, wenn nicht sogar unhaltbar. Hier ergibt sich ein dringender Forschungsbedarf.

Fehler im Zusammenhang mit dem Geschlecht des Unterrichtenden

Es hatte sich gezeigt, dass der Lösungserfolg unabhängig vom Geschlecht des Schülers war. Inwieweit dies auch für das Geschlecht des Unterrichtenden gilt, wird im Folgenden dargelegt.

Die Tabellen 125 und 126 geben Auskunft darüber, inwieweit der Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler davon abhängt, ob eine Lehrerin oder ein Lehrer unterrichtet.

Dies soll mit den folgenden Balkendiagrammen zusätzlich verdeutlicht werden.

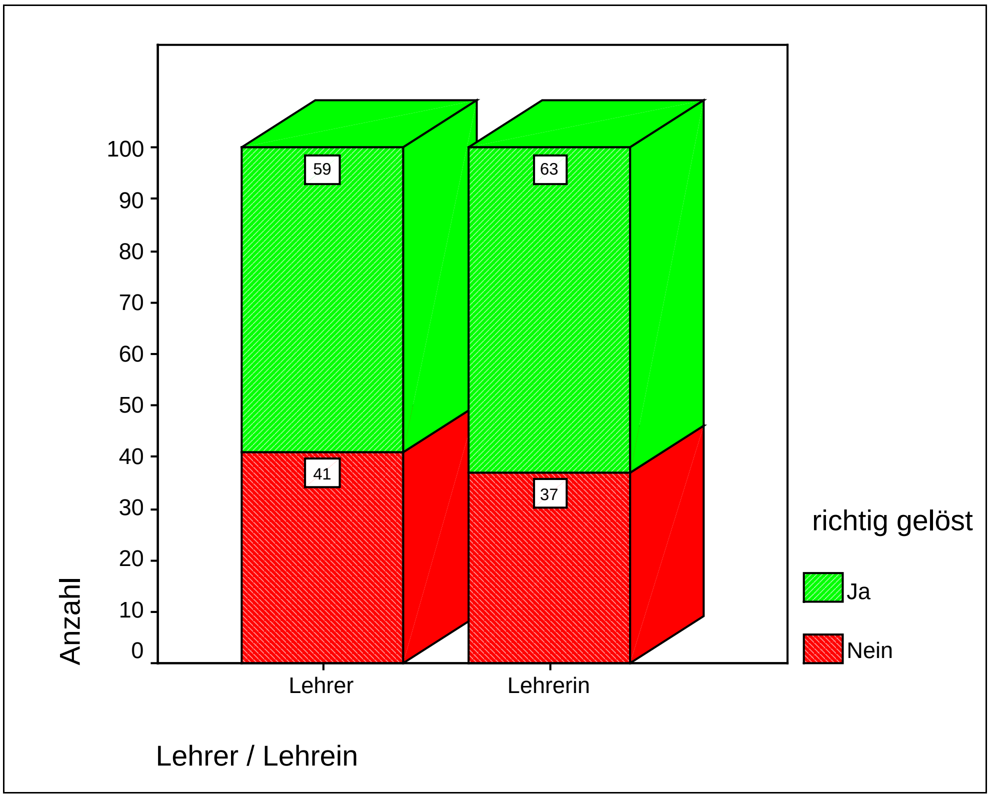


Abbildung 69: prozentualer Lösungserfolg in Abhängigkeit vom Geschlecht der Lehrkraft

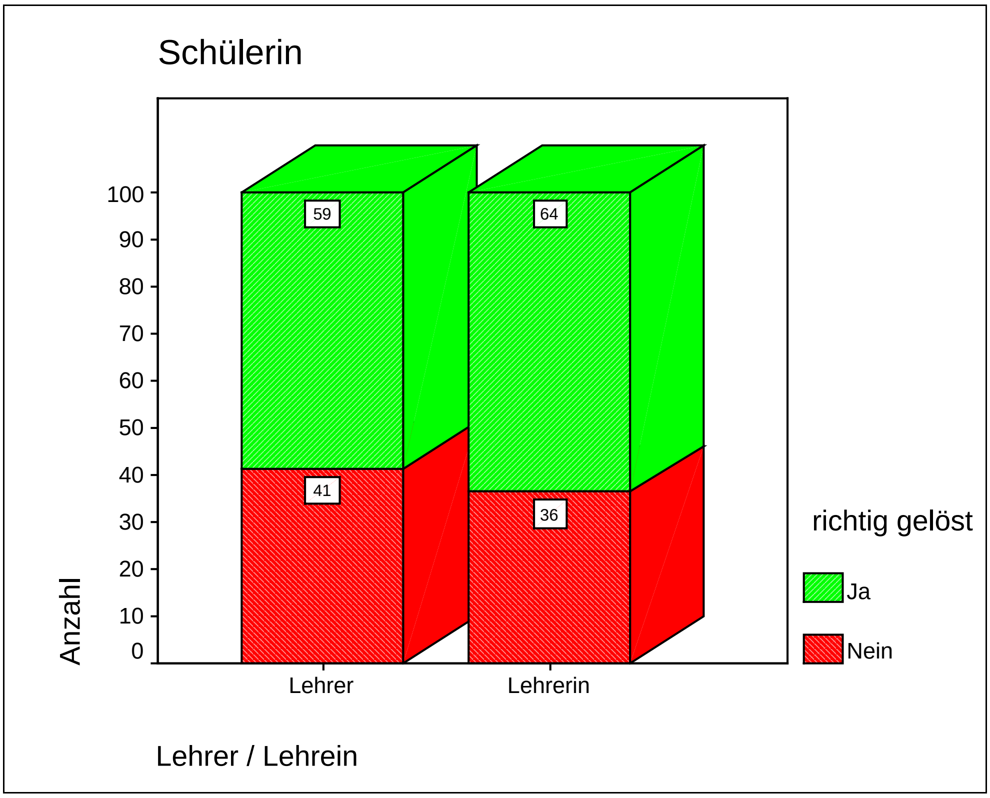


Abbildung 70: prozentualer Lösungserfolg von Schülerinnen in Abhängigkeit vom Geschlecht der Lehrkraft

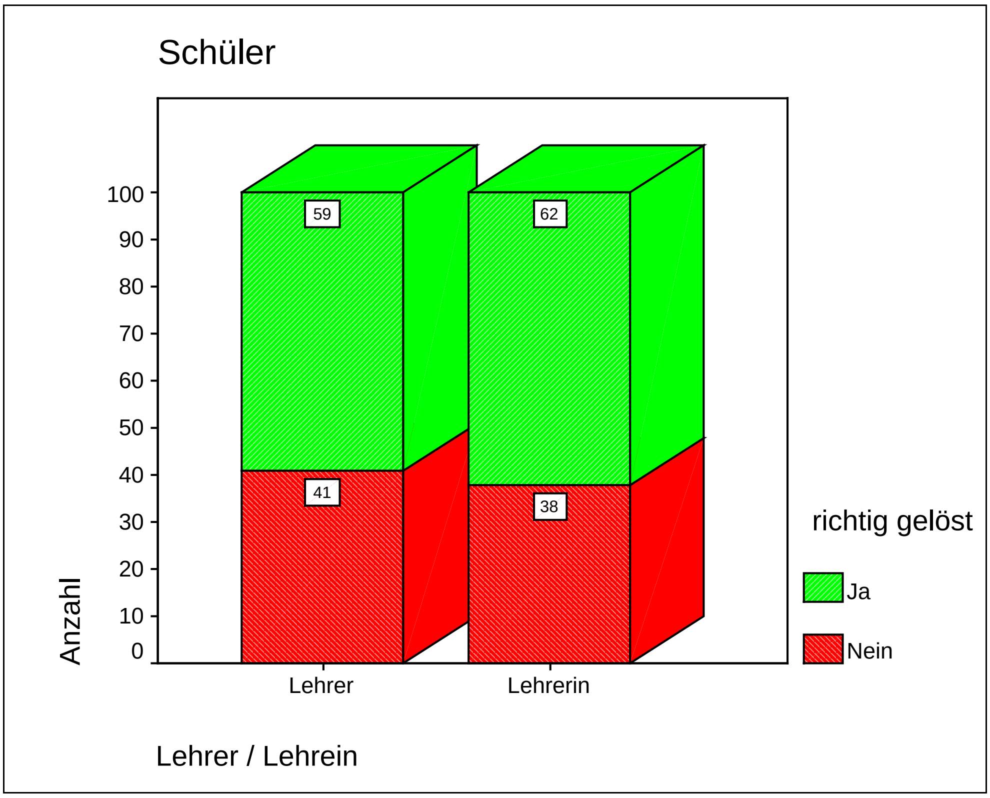


Abbildung 71: prozentualer Lösungserfolg von Schülern in Abhängigkeit vom Geschlecht der Lehrkraft

Der Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler ist in den Klassen, in denen eine Lehrerin unterrichtet, hochsignifikant besser als in den Klassen, in denen ein Lehrer unterrichtet.

Allerdings muss berücksichtigt werden, dass hiermit kein Zusammenhang mit dem Unterricht während des systematischen Behandelns in der 8. Jahrgangsstufe gefolgert werden kann. Nach der 8. Jahrgangsstufe hat in allen Realschul- und Gymnasialklassen ein Fachlehrerwechsel stattgefunden.

Nichtsdestotrotz ist das Ergebnis überraschend.

Zusammenfassende Ergebnisse zu den vorab formulierten Fragestellungen

In diesem Teilabschnitt werden die Ergebnisse der im Vorfeld formulierten Fragestellungen und Vermutungen kurz zusammengestellt. Es zeigt sich, dass bis zum jetzigen Zeitpunkt der Auswertung noch nicht alle Vermutungen geklärt werden können und dementsprechend weiterer Forschungsbedarf besteht. Teilweise kann dies mit dem vorhandenen Datenmaterial geschehen, ansonsten sind weitergehende Untersuchungen notwendig.

Der entscheidende Faktor für den Schwierigkeitsgrad der Testitems und damit für den Lösungserfolg war, wie ausführlich beschrieben, der Zahlenraum der Lösung.

Zu beachten ist, dass noch nicht geklärt ist, ob richtiges Umformen von Gleichungen davon abhängig ist, an welcher Stelle (in welcher Zeile) die umzuformende Gleichung steht – ob es eine Rolle spielt, dass die Gleichung als Aufgabe formuliert ist oder die Gleichung erst nach einigen Umformungen beim Lösungsprozess auftaucht.

Bei der folgenden Zusammenfassung soll, wie bisher, davon ausgegangen werden, dass dies keine Rolle spielt.

zu 1. Der Lösungserfolg hängt stark davon ab, wo der x-Term steht.
$Ax + B = C$ wird z. B. erfolgreicher bearbeitet als $B = Cx + D$.

Diese Frage lässt sich bislang nicht beantworten. Gleichungen dieser Art waren im Test mit Ausnahme der Sondergleichung $8x + 9 = 0$ nicht als Items vorhanden. Da bei den Umformungen die Standardstrategie überwog, gab es keine Gleichungen der Form $B = Cx + D$, die mehr als 100mal umgeformt wurden. Der Anteil der Gleichungen der Form $B = Cx$ war vergleichsweise gering. Aufgrund der verwendeten Standardstrategie beim Lösen traten häufiger Gleichungen der Form $Ax = D$ auf. Tabelle 120 zeigt den Anteil der Fehlerquote bei den häufiger als 100mal umgeformten Gleichungen. Unter den Gleichungen (mindestens 100mal umgeformt) mit einer Fehlerquote größer als 20% sind 14 der Form $Ax = D$ und fünf der Form $B = Cx$. Nach dem Datenmaterial lässt sich eher das Gegenteil vermuten.

zu 2. Der Lösungserfolg hängt stark von der Komplexität der Aufgabe ab.
Die leichtesten Aufgaben sind von der Form $x + B = D$ und $Ax = D$.

Diese Vermutung ist falsch. Die Gleichung -6x = 9 lag mit 47% bzw. 50% Lösungserfolg im Gegensatz zu der Gleichung -8 + x = 7 (83% bzw. 88% Lösungserfolg) lediglich im Mittelfeld. Die letzte Umformung, also die Umformung der am wenigsten komplexen Gleichung stellte sich als fehleranfälligste heraus.

zu 3. Besondere Schwierigkeiten sind im Zusammenhang mit der 0 im Ergebnis und der 0 auf einer Seite zu erwarten.

Im Wesentlichen bestätigte sich dies. Die Aufgabe 4x = 9x mit 0 im Ergebnis war die am schlechtesten gelöste Aufgabe (36% bzw. 38% Lösungserfolg). Die Aufgabe 8x + 9 = 0 lag mit 47% bzw. 54% im Mittelfeld. Insbesondere die Feinfehlerklassifikation zeigte, dass die 0 ein besonderes Problem darstellt. Quantifizierendes liegt zur Zeit noch nicht vor. Dieses soll noch anhand des Materials erfolgen.

zu 4. Besondere Schwierigkeiten sind zu erwarten, wenn die Koeffizienten A, B, C, D große Zahlen sind, z. B. Tausenderzahlen.

Dies bestätigte sich. Die Aufgabe 3000x + 4000 = 2000x + 6000 war die am schlechtesten gelöste Aufgabe mit natürlicher Lösung.
Die Gleichung 1000x = 2000 wurde zu 19% fehlerhaft umgeformt.

zu 5. Der Lösungserfolg hängt stark von der Anzahl der Minuszeichen in der Aufgabe ab.

Dies bleibt ungeklärt. Der entscheidende Faktor war der Zahlenraum der Lösung. Aufgaben mit 3 Minuszeichen wurden zum Teil überdurchschnittlich gut gelöst (76%, 70% und 67%; vgl. Tabelle 9) und auch mit 43% bzw. 44% schlecht gelöst. Gleichungen mit drei Minuszeichen traten mit Ausnahme der ersten Zeile (Aufgabe) nicht häufiger als 100mal auf.

zu 6. Eine besondere Schwierigkeit ist ein führendes Minuszeichen bei der Aufgabe.

Dies bestätigte sich nicht.

zu 7. Falls eine Umformungsstrategie verwandt wird, die im letzten Lösungsschritt eine Form mit negativen Koeffizienten vor dem x vermeidet, ist der Lösungserfolg größer.

Dies wurde ausführlich beschrieben und bestätigte sich.

zu 8. Beim Lösungsprozess werden viele Zwischenschritte notiert.

Dies bestätigte sich nicht (vgl. z. B. Tabelle 91).

zu 9. Um so weniger Umformungsschritte gemacht werden, um so größer ist der Lösungserfolg; dies gilt insbesondere wenn zwei Umformungen auf einmal gemacht werden.

Als Tendenz lässt sich dieses an Tabelle 103 erkennen. Genaueres soll noch folgen.

zu 10. Geschlechtsunterschiede zwischen Schülern bzgl. des Lösungserfolgs gibt es nicht.

Dieses stimmt.

zu 11. Geschlechtsunterschiede zwischen den Unterrichtenden bzgl. des Lösungserfolgs gibt es nicht.

Dies bestätigte sich nicht.

zu 12. Sonderaufgaben wie Ax = Cx und x = D + Cx werden deutlich schlechter gelöst.

Dies bestätigte sich. Die Aufgaben mit Lösungserfolgen von 36%, 38%, 39% bzw. 43% waren die am schlechtesten gelösten Aufgaben im Test.

zu 13. Fehler nehmen mit den Lösungsschritten ab. Die meisten Fehler werden beim ersten Umformungsschritt gemacht, die wenigsten beim letzten.

Dies ist ausführlich beschrieben und bestätigte sich nicht. Der letzte Umformungsschritt ist der fehleranfälligste.

zu 14. Die Fehlervielfalt ist insgesamt groß, aber bzgl. jeder einzelnen Aufgabe klein.

Bei der Feinklassifikation der Fehler zeigte sich, dass sowohl die Fehlervielfalt über alle Aufgaben groß ist, als auch, dass es einzelne Aufgaben gibt, bei denen die Fehlervielfalt groß bleibt.

zu 15. Die Stellung der Aufgabe innerhalb des Testes ändert den Lösungserfolg nicht.

Dies lässt sich nicht eindeutig beantworten. Entscheidend für den Lösungserfolg war der Zahlenraum der Lösung und die von den Schülerinnen und Schülern verwendete Lösungsstrategie. In beiden Tests waren lediglich die Sonderaufgaben identisch. Der Unterschied beim Lösungserfolg war nur bei den Aufgaben -8 + x = 7 (1. Aufgabe im Test A und 17. Aufgabe im Test B) und 8x + 9 = 0 (11. Aufgabe im Test A und 12. Aufgabe im Test B) signifikant. Bei den anderen Sonderaufgaben waren die Unterschiede im Lösungserfolg nicht signifikant.

zu 16. Gleichungen, die im Test für eine Schülerin oder einen Schüler mehrfach vorkommen, werden gleichbehandelt.

Dies bestätigte sich, wie ausführlich beschrieben, nicht.

6.2. Tabellen

Die ausführliche Präsentation der Tabellen ist für die interessierte Leserin und den interessierten Leser gedacht. Die Darstellung der Tabellen ist sicherlich gewöhnungsbedürftig. Umfangreiche Tabellen sind aus Druckgründen in Teiltabellen zerlegt worden. Im Anhang sind diese Tabellen nochmals als Gesamttabellen aufgenommen.

Auf einzelne Tabellen ist im vorigen Teilkapitel nur wenig eingegangen wurden. Obwohl diese Tabellen nicht einmal ansatzweise die Möglichkeiten der Auswertung des Datenmaterials andeuten, können diese zum „Stöbern“ anregen. Damit will ich Anreize geben, in diesem Bereich eigene Forschungsfragen zu entwickeln. Auf die in der Wissenschaftsgemeinde übliche Praxis Forschungsdesiderate zu formulieren, will ich hier ausdrücklich verzichten.

		gesamt	Anzahl der Fehler je Aufgabe					
			0 Fehler	1 Fehler	2 Fehler	3 Fehler	4 Fehler	5 Fehler
Test A	-8+x=7	441	365	52	22	2		
	-6x=9	441	213	201	22	5		
	3x-8=9x+1	441	219	164	48	9	1	
	3x+5=-3x-2	441	208	170	55	7		1
	2x-8=-7x-4	441	244	145	44	7	1	
	-7x-7=-8x-5	441	317	79	33	12		
	4x+9=9x+5	441	263	130	37	11		
	-6x+8=8x-8	441	230	160	39	12		
	8x+5=6x+7	441	323	91	20	7		
	-3x+3=-6x-2	441	223	170	36	10	2	
	-7x+4=-6x+5	441	299	111	25	6		
	8x+9=0	441	223	195	18	5		
	-9x-6=5x-4	441	210	170	46	14	1	
	x=5+4x	441	179	202	57	3		
	-3x+8=-2x-6	441	300	104	32	5		
	4x=9x	441	239	183	17	2		
	3000x+4000=2000x+6000	441	270	138	25	7	1	
	5x-5=2x-9	441	222	168	43	7	1	
Test B	-8x-5=-7x-7	423	282	96	37	7	1	
	-2x-6=-3x+8	423	327	61	23	11	1	
	5x-4=-9x-6	423	202	176	37	6	2	
	6x+7=8x+5	423	299	80	40	3	1	
	-7x-4=2x-8	423	231	135	48	7	2	
	9x+1=3x-8	423	209	147	60	6	1	
	-6x-2=-3x+3	423	219	155	40	9		
	3000x+4000=2000x+6000	423	286	108	25	3	1	
	-6x+5=-7x+4	423	307	83	28	5		
	2x-9=5x-5	423	223	157	36	6	1	
	8x+9=0	423	242	161	19		1	
	9x+5=4x+9	423	276	118	22	6	1	
	-3x-2=3x+5	423	207	175	32	9		
	x=5+4x	423	197	173	50	3		
	8x-8=-6x+8	423	251	143	23	5	1	
	4x=9x	423	234	173	14	1	1	
	-8+x=7	423	371	44	8			
	-6x=9	423	219	195	8	1		
Anzahl		15552	9129	5013	1169	219	21	1

Tabelle 89: Verteilung der Anzahl der Fehler je Aufgabe
("nicht bearbeitet" wird bei "1 Fehler" mitgezählt)

		gesamt	1. Fehler in Zeile				
			1. Umformungszeile	2. Umformungszeile	3. Umformungszeile	4. Umformungszeile	5. Umformungszeile
Test A	-8+x=7	76	64	8	4		
	-6x=9	228	200	25	3		
	3x-8=9x+1	222	78	64	67	12	1
	3x+5=-3x-2	233	81	62	80	7	3
	2x-8=-7x-4	197	66	50	74	7	
	-7x-7=-8x-5	124	66	34	21	3	
	4x+9=9x+5	178	61	44	67	5	1
	-6x+8=8x-8	211	78	53	73	6	1
	8x+5=6x+7	118	50	31	34	3	
	-3x+3=-6x-2	218	70	60	77	11	
	-7x+4=-6x+5	142	70	40	28	3	1
	8x+9=0	218	85	129	3	1	
	-9x-6=5x-4	231	69	58	92	11	1
	x=5+4x	262	172	71	19		
	-3x+8=-2x-6	141	75	42	22	2	
	4x=9x	202	159	36	7		
	3000x+4000=2000x+6000	171	76	30	63	2	
	5x-5=2x-9	219	82	52	78	7	
Test B	-8x-5=-7x-7	141	71	43	25	2	
	-2x-6=-3x+8	96	56	30	8	2	
	5x-4=-9x-6	221	73	41	94	13	
	6x+7=8x+5	124	50	33	39	1	1
	-7x-4=2x-8	192	72	48	64	8	
	9x+1=3x-8	214	75	59	73	7	
	-6x-2=-3x+3	204	60	50	83	10	1
	3000x+4000=2000x+6000	137	54	26	53	4	
	-6x+5=-7x+4	116	61	37	18		
	2x-9=5x-5	200	63	46	80	10	1
	8x+9=0	181	81	95	5		
	9x+5=4x+9	147	58	35	50	4	
	-3x-2=3x+5	216	84	59	65	7	1
	x=5+4x	226	149	61	14	2	
	8x-8=-6x+8	172	60	39	65	7	1
	4x=9x	189	147	36	6		
	-8+x=7	52	49	2	1		
	-6x=9	204	183	20	1		
Anzahl		6423	3048	1649	1556	157	13

Tabelle 90: fehlerhafte Umformungen je Umformungszeile
(nur unter Berücksichtigung des ersten gemachten Fehlers)

		gesamt	Anzahl der Zeilen in der Aufgabe								
			0	1	2	3	4	5	6	7	8
Test A	-8+x=7	441	1	2	298	115	21	4			
	-6x=9	441	10	2	267	125	28	8	1		
	3x-8=9x+1	441	7		13	94	212	93	18	2	2
	3x+5=-3x-2	441	8	5	18	117	226	53	14		
	2x-8=-7x-4	441	13	1	11	114	266	31	3		2
	-7x-7=-8x-5	441	15		83	191	132	16	4		
	4x+9=9x+5	441	12	2	10	112	258	41	6		
	-6x+8=8x-8	441	11	1	15	103	206	84	18	3	
	8x+5=6x+7	441	16		11	113	275	25		1	
	-3x+3=-6x-2	441	17	1	14	97	259	49	4		
	-7x+4=-6x+5	441	22		38	180	181	19	1		
	8x+9=0	441	22	4	34	322	57	2			
	-9x-6=5x-4	441	19		10	91	237	77	7		
	x=5+4x	441	26	6	23	270	98	15	3		
	-3x+8=-2x-6	441	22		47	180	172	17	3		
	4x=9x	441	61	36	114	202	22	6			
	3000x+4000=2000x+6000	441	31	2	18	95	266	24	5		
	5x-5=2x-9	441	28		8	113	241	50	1		
Test B	-8x-5=-7x-7	423	5	2	27	151	207	28	3		
	-2x-6=-3x+8	423	4		61	215	128	14	1		
	5x-4=-9x-6	423	7	1	6	104	241	55	8		1
	6x+7=8x+5	423	4	2	4	99	274	35	5		
	-7x-4=2x-8	423	7		5	107	242	59	2	1	
	9x+1=3x-8	423	8		4	96	230	68	17		
	-6x-2=-3x+3	423	6		4	97	246	64	5	1	
	3000x+4000=2000x+6000	423	9		8	82	287	30	6	1	
	-6x+5=-7x+4	423	8		59	211	133	10	1	1	
	2x-9=5x-5	423	10		6	104	234	61	8		
	8x+9=0	423	16	2	32	307	64	2			
	9x+5=4x+9	423	14		5	104	267	33			
	-3x-2=3x+5	423	13	4	20	114	209	58	5		
	x=5+4x	423	23	1	27	252	101	17	2		
	8x-8=-6x+8	423	10	1	10	98	228	62	14		
	4x=9x	423	54	42	112	189	21	4		1	
	-8+x=7	423	13		362	36	10	2			
	-6x=9	423	26	4	265	95	28	5			
Anzahl		15552	578	121	2049	5095	6307	1221	165	11	5

Tabelle 91: Anzahl der Umformungsschritte (Anzahl der Zeilen) je Aufgabe
(1. Umformungsschritt entspricht der 2. Zeile)

		gesamt	Fehler im Umformungsschritt							
			erste Umformung		mittlere Umformung		letzte Umformung		nur eine Umformung	
		Anzahl	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	99	32	32,3%	8	8,1%	30	30,3%	29	29,3%
	-6x=9	247	56	22,7%	18	7,3%	42	17,0%	131	53,0%
	3x-8=9x+1	276	64	23,2%	79	28,6%	126	45,7%	7	2,5%
	3x+5=-3x-2	277	52	18,8%	62	22,4%	147	53,1%	16	5,8%
	2x-8=-7x-4	226	43	19,0%	51	22,6%	125	55,3%	7	3,1%
	-7x-7=-8x-5	166	40	24,1%	42	25,3%	73	44,0%	11	6,6%
	4x+9=9x+5	209	41	19,6%	48	23,0%	114	54,5%	6	2,9%
	-6x+8=8x-8	236	56	23,7%	59	25,0%	111	47,0%	10	4,2%
	8x+5=6x+7	131	27	20,6%	31	23,7%	68	51,9%	5	3,8%
	-3x+3=-6x-2	256	47	18,4%	63	24,6%	141	55,1%	5	2,0%
	-7x+4=-6x+5	157	37	23,6%	33	21,0%	76	48,4%	11	7,0%
	8x+9=0	201	43	21,4%	14	7,0%	129	64,2%	15	7,5%
	-9x-6=5x-4	276	43	15,6%	60	21,7%	166	60,1%	7	2,5%
	x=5+4x	282	123	43,6%	28	9,9%	114	40,4%	17	6,0%
	-3x+8=-2x-6	161	39	24,2%	37	23,0%	71	44,1%	14	8,7%
	4x=9x	126	19	15,1%	11	8,7%	53	42,1%	43	34,1%
	3000x+4000=2000x+6000	180	33	18,3%	27	15,0%	110	61,1%	10	5,6%
	5x-5=2x-9	238	50	21,0%	47	19,7%	137	57,6%	4	1,7%
	Gesamt	3744	845	11,9%	718	10,1%	1833	25,7%	348	4,9%
Test B	-8x-5=-7x-7	188	54	28,7%	40	21,3%	84	44,7%	10	5,3%
	-2x-6=-3x+8	140	49	35,0%	31	22,1%	57	40,7%	3	2,1%
	5x-4=-9x-6	256	60	23,4%	49	19,1%	145	56,6%	2	,8%
	6x+7=8x+5	165	41	24,8%	39	23,6%	82	49,7%	3	1,8%
	-7x-4=2x-8	235	58	24,7%	53	22,6%	121	51,5%	3	1,3%
	9x+1=3x-8	278	63	22,7%	79	28,4%	132	47,5%	4	1,4%
	-6x-2=-3x+3	249	52	20,9%	49	19,7%	145	58,2%	3	1,2%
	3000x+4000=2000x+6000	162	39	24,1%	32	19,8%	85	52,5%	6	3,7%
	-6x+5=-7x+4	145	48	33,1%	27	18,6%	65	44,8%	5	3,4%
	2x-9=5x-5	229	49	21,4%	52	22,7%	124	54,1%	4	1,7%
	8x+9=0	171	45	26,3%	5	2,9%	103	60,2%	18	10,5%
	9x+5=4x+9	168	40	23,8%	37	22,0%	87	51,8%	4	2,4%
	-3x-2=3x+5	236	49	20,8%	46	19,5%	123	52,1%	18	7,6%
	x=5+4x	249	106	42,6%	19	7,6%	105	42,2%	19	7,6%
	8x-8=-6x+8	172	40	23,3%	42	24,4%	83	48,3%	7	4,1%
	4x=9x	112	20	17,9%	7	6,3%	54	48,2%	31	27,7%
	-8+x=7	47	11	23,4%	1	2,1%	10	21,3%	25	53,2%
	-6x=9	184	26	14,1%	4	2,2%	27	14,7%	127	69,0%
	Gesamt	3386	850	11,9%	612	8,6%	1632	22,9%	292	4,1%

Tabelle 92: fehlerhafte Umformungen je Umformungsschritt
(alle fehlerhaften Umformungen werden berücksichtigt)

			Fehler im Umformungsschritt				Gesamt
			erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung	nur eine Umformung	
	richtige Umformung	Anzahl	11116	7989	9468	1409	29982
		% der Gesamtzahl	30,0%	21,5%	25,5%	3,8%	80,8%
	falsche Umformung	Anzahl	1695	1330	3465	640	7130
		% der Gesamtzahl	4,6%	3,6%	9,3%	1,7%	19,2%
Gesamt		Anzahl	12811	9319	12933	2049	37112
		% der Gesamtzahl	34,5%	25,1%	34,8%	5,5%	100,0%

Tabelle 93: Kreuztabelle: falsche Umformung - Fehler im Umformungsschritt

			Fehler im Umformungsschritt			Gesamt
			erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung	
	richtige Umformung	Anzahl	11116	7989	9468	28573
		% der Gesamtzahl	31,7%	22,8%	27,0%	81,5%
	falsche Umformung	Anzahl	1695	1330	3465	6490
		% der Gesamtzahl	4,8%	3,8%	9,9%	18,5%
Gesamt[a]		Anzahl	12811	9319	12933	35063
		% der Gesamtzahl	36,5%	26,6%	36,9%	100,0%

a. chi-quadrat = 936 df =2

Tabelle 94: Kreuztabelle: falsche Umformung - Fehler im Umformungsschritt
(nur unter Beachtung der Fälle mit mehr als einer Umformung)

		gesamt	Aufgabe richtig gelöst		1. Fehler im Umformungsschritt				
		Anzahl	Nein	Ja	erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung	keine Umformung	nur eine Umformung
			Anzahl	Anzahl	Anzahl	Anzahl	Anzahl	Anzahl	Anzahl
Test A	-8+x=7	441	77	364	32	6	6	3	30
	-6x=9	441	232	209	58	10	18	12	134
	3x-8=9x+1	441	243	198	79	61	83	7	13
	3x+5=-3x-2	441	253	188	70	46	106	13	18
	2x-8=-7x-4	441	218	223	63	36	95	14	10
	-7x-7=-8x-5	441	131	310	45	24	34	15	13
	4x+9=9x+5	441	197	244	57	36	81	14	9
	-6x+8=8x-8	441	236	205	77	41	92	12	14
	8x+5=6x+7	441	126	315	34	19	49	16	8
	-3x+3=-6x-2	441	238	203	60	45	103	18	12
	-7x+4=-6x+5	441	146	295	40	25	47	22	12
	8x+9=0	441	235	206	49	9	124	26	27
	-9x-6=5x-4	441	245	196	55	43	119	19	9
	x=5+4x	441	269	172	126	20	70	32	21
	-3x+8=-2x-6	441	147	294	43	29	37	22	16
	4x=9x	441	274	167	32	8	35	97	102
	3000x+4000=2000x+6000	441	178	263	38	12	83	33	12
	5x-5=2x-9	441	240	201	69	34	103	28	6
	Gesamt	7938	3685	4253	1027	504	1285	403	466
Test B	-8x-5=-7x-7	423	145	278	57	28	42	7	11
	-2x-6=-3x+8	423	103	320	53	16	24	4	6
	5x-4=-9x-6	423	242	181	80	35	113	8	6
	6x+7=8x+5	423	134	289	51	29	45	6	3
	-7x-4=2x-8	423	213	210	81	40	80	7	5
	9x+1=3x-8	423	225	198	74	59	80	8	4
	-6x-2=-3x+3	423	218	205	64	40	104	6	4
	3000x+4000=2000x+6000	423	145	278	46	19	64	9	7
	-6x+5=-7x+4	423	118	305	49	18	37	8	6
	2x-9=5x-5	423	219	204	66	39	98	10	6
	8x+9=0	423	195	228	50	2	98	18	27
	9x+5=4x+9	423	161	262	54	24	65	14	4
	-3x-2=3x+5	423	230	193	61	32	100	17	20
	x=5+4x	423	239	184	112	12	65	24	26
	8x-8=-6x+8	423	199	224	67	30	82	11	9
	4x=9x	423	272	151	31	4	38	96	103
	-8+x=7	423	52	371	11	1	2	13	25
	-6x=9	423	210	213	27	3	18	30	132
	Gesamt	7614	3320	4294	1034	431	1155	296	404

Tabelle 95: Verteilung der Fehler je Umformungsschritt
(nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

		1. Fehler im Umformungsschritt				
		erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung	keine Umformung	nur eine Umformung
		Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	41,6%	7,8%	7,8%	3,9%	39,0%
	-6x=9	25,0%	4,3%	7,8%	5,2%	57,8%
	3x-8=9x+1	32,5%	25,1%	34,2%	2,9%	5,3%
	3x+5=-3x-2	27,7%	18,2%	41,9%	5,1%	7,1%
	2x-8=-7x-4	28,9%	16,5%	43,6%	6,4%	4,6%
	-7x-7=-8x-5	34,4%	18,3%	26,0%	11,5%	9,9%
	4x+9=9x+5	28,9%	18,3%	41,1%	7,1%	4,6%
	-6x+8=8x-8	32,6%	17,4%	39,0%	5,1%	5,9%
	8x+5=6x+7	27,0%	15,1%	38,9%	12,7%	6,3%
	-3x+3=-6x-2	25,2%	18,9%	43,3%	7,6%	5,0%
	-7x+4=-6x+5	27,4%	17,1%	32,2%	15,1%	8,2%
	8x+9=0	20,9%	3,8%	52,8%	11,1%	11,5%
	-9x-6=5x-4	22,4%	17,6%	48,6%	7,8%	3,7%
	x=5+4x	46,8%	7,4%	26,0%	11,9%	7,8%
	-3x+8=-2x-6	29,3%	19,7%	25,2%	15,0%	10,9%
	4x=9x	11,7%	2,9%	12,8%	35,4%	37,2%
	3000x+4000=2000x+6000	21,3%	6,7%	46,6%	18,5%	6,7%
	5x-5=2x-9	28,8%	14,2%	42,9%	11,7%	2,5%
Test B	-8x-5=-7x-7	39,3%	19,3%	29,0%	4,8%	7,6%
	-2x-6=-3x+8	51,5%	15,5%	23,3%	3,9%	5,8%
	5x-4=-9x-6	33,1%	14,5%	46,7%	3,3%	2,5%
	6x+7=8x+5	38,1%	21,6%	33,6%	4,5%	2,2%
	-7x-4=2x-8	38,0%	18,8%	37,6%	3,3%	2,3%
	9x+1=3x-8	32,9%	26,2%	35,6%	3,6%	1,8%
	-6x-2=-3x+3	29,4%	18,3%	47,7%	2,8%	1,8%
	3000x+4000=2000x+6000	31,7%	13,1%	44,1%	6,2%	4,8%
	-6x+5=-7x+4	41,5%	15,3%	31,4%	6,8%	5,1%
	2x-9=5x-5	30,1%	17,8%	44,7%	4,6%	2,7%
	8x+9=0	25,6%	1,0%	50,3%	9,2%	13,8%
	9x+5=4x+9	33,5%	14,9%	40,4%	8,7%	2,5%
	-3x-2=3x+5	26,5%	13,9%	43,5%	7,4%	8,7%
	x=5+4x	46,9%	5,0%	27,2%	10,0%	10,9%
	8x-8=-6x+8	33,7%	15,1%	41,2%	5,5%	4,5%
	4x=9x	11,4%	1,5%	14,0%	35,3%	37,9%
	-8+x=7	21,2%	1,9%	3,8%	25,0%	48,1%
	-6x=9	12,9%	1,4%	8,6%	14,3%	62,9%

Tabelle 96: prozentuale Verteilung der Fehler je Umformungsschritt
(nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

		gesamt	Aufgabe richtig gelöst	1. Fehler im Umformungsschritt		
		Anzahl	Nein	erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung
			Anzahl	Anzahl	Anzahl	Anzahl
Test A	-8+x=7	44	44	32	6	6
	-6x=9	86	86	58	10	18
	3x-8=9x+1	223	223	79	61	83
	3x+5=-3x-2	222	222	70	46	106
	2x-8=-7x-4	194	194	63	36	95
	-7x-7=-8x-5	103	103	45	24	34
	4x+9=9x+5	174	174	57	36	81
	-6x+8=8x-8	210	210	77	41	92
	8x+5=6x+7	102	102	34	19	49
	-3x+3=-6x-2	208	208	60	45	103
	-7x+4=-6x+5	112	112	40	25	47
	8x+9=0	182	182	49	9	124
	-9x-6=5x-4	217	217	55	43	119
	x=5+4x	216	216	126	20	70
	-3x+8=-2x-6	109	109	43	29	37
	4x=9x	75	75	32	8	35
	3000x+4000=2000x+6000	133	133	38	12	83
	5x-5=2x-9	206	206	69	34	103
	Gesamt	2816	2816	1027	504	1285
Test B	-8x-5=-7x-7	127	127	57	28	42
	-2x-6=-3x+8	93	93	53	16	24
	5x-4=-9x-6	228	228	80	35	113
	6x+7=8x+5	125	125	51	29	45
	-7x-4=2x-8	201	201	81	40	80
	9x+1=3x-8	213	213	74	59	80
	-6x-2=-3x+3	208	208	64	40	104
	3000x+4000=2000x+6000	129	129	46	19	64
	-6x+5=-7x+4	104	104	49	18	37
	2x-9=5x-5	203	203	66	39	98
	8x+9=0	150	150	50	2	98
	9x+5=4x+9	143	143	54	24	65
	-3x-2=3x+5	193	193	61	32	100
	x=5+4x	189	189	112	12	65
	8x-8=-6x+8	179	179	67	30	82
	4x=9x	73	73	31	4	38
	-8+x=7	14	14	11	1	2
	-6x=9	48	48	27	3	18
	Gesamt	2620	2620	1034	431	1155

Tabelle 97: Verteilung der Fehler je Umformungsschritt
(nur unter Beachtung des ersten Fehlers und mehr als einer durchgeführten Umformung)

		1. Fehler im Umformungsschritt		
		erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung
		Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	72,7%	13,6%	13,6%
	-6x=9	67,4%	11,6%	20,9%
	3x-8=9x+1	35,4%	27,4%	37,2%
	3x+5=-3x-2	31,5%	20,7%	47,7%
	2x-8=-7x-4	32,5%	18,6%	49,0%
	-7x-7=-8x-5	43,7%	23,3%	33,0%
	4x+9=9x+5	32,8%	20,7%	46,6%
	-6x+8=8x-8	36,7%	19,5%	43,8%
	8x+5=6x+7	33,3%	18,6%	48,0%
	-3x+3=-6x-2	28,8%	21,6%	49,5%
	-7x+4=-6x+5	35,7%	22,3%	42,0%
	8x+9=0	26,9%	4,9%	68,1%
	-9x-6=5x-4	25,3%	19,8%	54,8%
	x=5+4x	58,3%	9,3%	32,4%
	-3x+8=-2x-6	39,4%	26,6%	33,9%
	4x=9x	42,7%	10,7%	46,7%
	3000x+4000=2000x+6000	28,6%	9,0%	62,4%
	5x-5=2x-9	33,5%	16,5%	50,0%
Test B	-8x-5=-7x-7	44,9%	22,0%	33,1%
	-2x-6=-3x+8	57,0%	17,2%	25,8%
	5x-4=-9x-6	35,1%	15,4%	49,6%
	6x+7=8x+5	40,8%	23,2%	36,0%
	-7x-4=2x-8	40,3%	19,9%	39,8%
	9x+1=3x-8	34,7%	27,7%	37,6%
	-6x-2=-3x+3	30,8%	19,2%	50,0%
	3000x+4000=2000x+6000	35,7%	14,7%	49,6%
	-6x+5=-7x+4	47,1%	17,3%	35,6%
	2x-9=5x-5	32,5%	19,2%	48,3%
	8x+9=0	33,3%	1,3%	65,3%
	9x+5=4x+9	37,8%	16,8%	45,5%
	-3x-2=3x+5	31,6%	16,6%	51,8%
	x=5+4x	59,3%	6,3%	34,4%
	8x-8=-6x+8	37,4%	16,8%	45,8%
	4x=9x	42,5%	5,5%	52,1%
	-8+x=7	78,6%	7,1%	14,3%
	-6x=9	56,3%	6,3%	37,5%

Tabelle 98: prozentuale Verteilung der Fehler je Umformungsschritt
(nur unter Beachtung des ersten Fehlers und mehr als einer durchgeführten Umformung)

Aufgabe richtig gelöst

		Gruppierung der Aufgaben (rel. Häufigk.)		
		leicht	mittel	schwer
Aufgabe	-8+x=7	,88	,	,
	-8+x=7	,83	,	,
	-2x-6=-3x+8	,76	,	,
	-6x+5=-7x+4	,72	,	,
	8x+5=6x+7	,71	,	,
	-7x-7=-8x-5	,70	,	,
	6x+7=8x+5	,68	,	,
	-7x+4=-6x+5	,67	,	,
	-3x+8=-2x-6	,67	,	,
	-8x-5=-7x-7	,	,66	,
	3000x+4000=2000x+6000	,	,66	,
	9x+5=4x+9	,	,62	,
	3000x+4000=2000x+6000	,	,60	,
	4x+9=9x+5	,	,55	,
	8x+9=0	,	,54	,
	8x-8=-6x+8	,	,53	,
	2x-8=-7x-4	,	,51	,
	-6x=9	,	,50	,
	-7x-4=2x-8	,	,50	,
	-6x-2=-3x+3	,	,48	,
	2x-9=5x-5	,	,48	,
	-6x=9	,	,47	,
	9x+1=3x-8	,	,47	,
	8x+9=0	,	,47	,
	-6x+8=8x-8	,	,46	,
	-3x+3=-6x-2	,	,46	,
	-3x-2=3x+5	,	,	,46
	5x-5=2x-9	,	,46	,
	3x-8=9x+1	,	,	,45
	-9x-6=5x-4	,	,	,44
	x=5+4x	,	,	,43
	5x-4=-9x-6	,	,	,43
	3x+5=-3x-2	,	,	,43
	x=5+4x	,	,	,39
	4x=9x	,	,	,38
	4x=9x	,	,	,36

Tabelle 99: Gruppierung der Aufgaben nach Lösungserfolg

		Gruppierung der Aufgaben (absolute Häufigkeiten)		
		leicht	mittel	schwer
Test A	-8+x=7	441		
	-6x=9		441	
	3x-8=9x+1			441
	3x+5=-3x-2			441
	2x-8=-7x-4		441	
	-7x-7=-8x-5	441		
	4x+9=9x+5		441	
	-6x+8=8x-8		441	
	8x+5=6x+7	441		
	-3x+3=-6x-2		441	
	-7x+4=-6x+5	441		
	8x+9=0		441	
	-9x-6=5x-4			441
	x=5+4x			441
	-3x+8=-2x-6	441		
	4x=9x			441
	3000x+4000=2000x+6000		441	
	5x-5=2x-9		441	
Test B	-8x-5=-7x-7		423	
	-2x-6=-3x+8	423		
	5x-4=-9x-6			423
	6x+7=8x+5	423		
	-7x-4=2x-8		423	
	9x+1=3x-8		423	
	-6x-2=-3x+3		423	
	3000x+4000=2000x+6000		423	
	-6x+5=-7x+4	423		
	2x-9=5x-5		423	
	8x+9=0		423	
	9x+5=4x+9		423	
	-3x-2=3x+5			423
	x=5+4x			423
	8x-8=-6x+8		423	
	4x=9x			423
	-8+x=7	423		
	-6x=9		423	

Tabelle 100: Gruppierung der Aufgaben nach Schwierigkeit

		Gruppierung der Aufgaben		
		leicht	mittel	schwer
Test	A	2205	3528	2205
	B	1692	4230	1692
Gesamt		3897	7758	3897

Tabelle 101: Gruppierung nach Schwierigkeit

Gruppierung der Aufgaben		Gesamtanzahl falsch	1. Fehler im Umformungsschritt					
			erste Umformung		mittlere Umformung		letzte Umformung	
		Anzahl	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
leicht	-8+x=7	44	32	72,7%	6	13,6%	6	13,6%
	-7x-7=-8x-5	103	45	43,7%	24	23,3%	34	33,0%
	8x+5=6x+7	102	34	33,3%	19	18,6%	49	48,0%
	-7x+4=-6x+5	112	40	35,7%	25	22,3%	47	42,0%
	-3x+8=-2x-6	109	43	39,4%	29	26,6%	37	33,9%
	-2x-6=-3x+8	93	53	57,0%	16	17,2%	24	25,8%
	6x+7=8x+5	125	51	40,8%	29	23,2%	45	36,0%
	-6x+5=-7x+4	104	49	47,1%	18	17,3%	37	35,6%
	-8+x=7	14	11	78,6%	1	7,1%	2	14,3%
	Gesamt	806	358	44,4%	167	20,7%	281	34,9%
mittel	-6x=9	86	58	67,4%	10	11,6%	18	20,9%
	2x-8=-7x-4	194	63	32,5%	36	18,6%	95	49,0%
	4x+9=9x+5	174	57	32,8%	36	20,7%	81	46,6%
	-6x+8=8x-8	210	77	36,7%	41	19,5%	92	43,8%
	-3x+3=-6x-2	208	60	28,8%	45	21,6%	103	49,5%
	8x+9=0	182	49	26,9%	9	4,9%	124	68,1%
	3000x+4000=2000x+6000	133	38	28,6%	12	9,0%	83	62,4%
	5x-5=2x-9	206	69	33,5%	34	16,5%	103	50,0%
	-8x-5=-7x-7	127	57	44,9%	28	22,0%	42	33,1%
	-7x-4=2x-8	201	81	40,3%	40	19,9%	80	39,8%
	9x+1=3x-8	213	74	34,7%	59	27,7%	80	37,6%
	-6x-2=-3x+3	208	64	30,8%	40	19,2%	104	50,0%
	3000x+4000=2000x+6000	129	46	35,7%	19	14,7%	64	49,6%
	2x-9=5x-5	203	66	32,5%	39	19,2%	98	48,3%
	8x+9=0	150	50	33,3%	2	1,3%	98	65,3%
	9x+5=4x+9	143	54	37,8%	24	16,8%	65	45,5%
	8x-8=-6x+8	179	67	37,4%	30	16,8%	82	45,8%
	-6x=9	48	27	56,3%	3	6,3%	18	37,5%
	Gesamt	2994	1057	35,3%	507	16,9%	1430	47,8%
schwer	3x-8=9x+1	223	79	35,4%	61	27,4%	83	37,2%
	3x+5=-3x-2	222	70	31,5%	46	20,7%	106	47,7%
	-9x-6=5x-4	217	55	25,3%	43	19,8%	119	54,8%
	x=5+4x	216	126	58,3%	20	9,3%	70	32,4%
	4x=9x	75	32	42,7%	8	10,7%	35	46,7%
	5x-4=-9x-6	228	80	35,1%	35	15,4%	113	49,6%
	-3x-2=3x+5	193	61	31,6%	32	16,6%	100	51,8%
	x=5+4x	189	112	59,3%	12	6,3%	65	34,4%
	4x=9x	73	31	42,5%	4	5,5%	38	52,1%
	Gesamt	1636	646	39,5%	261	16,0%	729	44,6%

Tabelle 102: Verteilung der Fehler je Umformungsschritt mit Gruppierung der Aufgaben
(nur unter Beachtung des ersten Fehlers und mehr als einer durchgeführten Umformung)

		gesamt	Anzahl der Fehler je Aufgabe		
			0 Fehler bei 1 Umformung	1 Fehler bei 1 Umformung	0 Fehler bei 2 Umformungen
Test A	-8+x=7	438	269	29	84
	-6x=9	429	135	132	61
	3x-8=9x+1	434	6	7	51
	3x+5=-3x-2	428	2	16	65
	2x-8=-7x-4	427	4	7	76
	-7x-7=-8x-5	426	72	11	161
	4x+9=9x+5	427	4	6	84
	-6x+8=8x-8	429	5	10	55
	8x+5=6x+7	425	6	5	89
	-3x+3=-6x-2	423	9	5	58
	-7x+4=-6x+5	419	27	11	143
	8x+9=0	415	18	16	170
	-9x-6=5x-4	422	3	7	54
	x=5+4x	409	6	17	115
	-3x+8=-2x-6	419	33	14	145
	4x=9x	344	71	43	156
	3000x+4000=2000x+6000	408	8	10	62
	5x-5=2x-9	413	4	4	69
Test B	-8x-5=-7x-7	417	17	10	102
	-2x-6=-3x+8	420	58	3	184
	5x-4=-9x-6	416	4	2	64
	6x+7=8x+5	418	1	3	75
	-7x-4=2x-8	417	2	3	62
	9x+1=3x-8	416		4	52
	-6x-2=-3x+3	418	1	3	60
	3000x+4000=2000x+6000	414	2	6	58
	-6x+5=-7x+4	415	54	5	166
	2x-9=5x-5	413	2	4	66
	8x+9=0	405	14	18	178
	9x+5=4x+9	409	1	4	74
	-3x-2=3x+5	406	2	18	56
	x=5+4x	399	8	19	119
	8x-8=-6x+8	412	3	7	67
	4x=9x	327	81	31	140
	-8+x=7	410	337	25	24
	-6x=9	393	138	127	55
Anzahl		14860	1407	642	3300

Teiltabellen 103: Fehler in Abhängigkeit vom Umformungsschritt und der Anzahl der Umformungsschritte

		Anzahl der Fehler je Aufgabe				
		1 Fehler bei 2 Umfor-mungen	2 Fehler bei 2 Umfor-mungen	0 Fehler bei 3 Umfor-mungen	1 Fehler bei 3 Umfor-mungen	2 Fehler bei 3 Umfor-mungen
Test A	-8+x=7	12	19	10	6	3
	-6x=9	50	14	12	7	6
	3x-8=9x+1	37	6	101	80	26
	3x+5=-3x-2	38	14	111	86	27
	2x-8=-7x-4	30	8	149	85	27
	-7x-7=-8x-5	18	12	75	30	17
	4x+9=9x+5	23	5	149	75	25
	-6x+8=8x-8	33	15	96	87	16
	8x+5=6x+7	20	4	215	45	12
	-3x+3=-6x-2	32	7	125	101	26
	-7x+4=-6x+5	33	4	120	38	19
	8x+9=0	140	12	34	12	6
	-9x-6=5x-4	30	7	97	98	32
	x=5+4x	118	37	45	34	17
	-3x+8=-2x-6	32	3	110	33	25
	4x=9x	35	11	9	6	5
	3000x+4000=2000x+6000	26	7	181	66	16
	5x-5=2x-9	36	8	114	92	31
Test B	-8x-5=-7x-7	34	15	143	40	20
	-2x-6=-3x+8	24	8	84	23	13
	5x-4=-9x-6	28	12	102	117	17
	6x+7=8x+5	10	14	196	55	21
	-7x-4=2x-8	26	19	131	85	22
	9x+1=3x-8	26	18	111	85	30
	-6x-2=-3x+3	30	7	115	98	28
	3000x+4000=2000x+6000	16	8	205	68	11
	-6x+5=-7x+4	34	11	81	32	16
	2x-9=5x-5	28	10	113	97	21
	8x+9=0	117	12	49	8	7
	9x+5=4x+9	23	7	185	66	12
	-3x-2=3x+5	51	7	114	71	18
	x=5+4x	95	38	57	30	12
	8x-8=-6x+8	22	9	127	86	12
	4x=9x	38	11	11	7	3
	-8+x=7	5	7	8	1	1
	-6x=9	32	8	22	5	
Anzahl		1382	414	3607	1955	600

Teiltabellen 103: Fehler in Abhängigkeit vom Umformungsschritt und der Anzahl der Umformungsschritte

		3 Fehler bei 3 Umfor-mungen	0 Fehler bei 4 Umfor-mungen	1 Fehler bei 4 Umfor-mungen	2 Fehler bei 4 Umfor-mungen	3 Fehler bei 4 Umfor-mungen
		Anzahl der Fehler je Aufgabe				
Test A	-8+x=7	2	2	2		
	-6x=9	3	5		1	2
	3x-8=9x+1	5	48	30	11	3
	3x+5=-3x-2	2	26	11	12	4
	2x-8=-7x-4	5	13	9	7	1
	-7x-7=-8x-5	10	8	4	2	2
	4x+9=9x+5	9	24	10	5	2
	-6x+8=8x-8	7	60	15	4	5
	8x+5=6x+7	3	13	5	4	3
	-3x+3=-6x-2	7	30	12	2	3
	-7x+4=-6x+5	4	9	6	2	2
	8x+9=0	5	1	1		
	-9x-6=5x-4	10	53	15	4	4
	x=5+4x	2	10	1	3	1
	-3x+8=-2x-6	4	11	2	3	1
	4x=9x	2	3	2	1	
	3000x+4000=2000x+6000	3	17	2	2	3
	5x-5=2x-9	4	34	8	4	3
Test B	-8x-5=-7x-7	5	20	5	1	2
	-2x-6=-3x+8	8	2	6	2	3
	5x-4=-9x-6	6	26	22	6	
	6x+7=8x+5	3	27	3	4	
	-7x-4=2x-8	5	34	14	7	2
	9x+1=3x-8	5	36	21	10	1
	-6x-2=-3x+3	6	40	17	6	1
	3000x+4000=2000x+6000	3	16	9	4	
	-6x+5=-7x+4	4	4	4	1	1
	2x-9=5x-5	3	37	16	5	3
	8x+9=0		1			
	9x+5=4x+9	4	16	11	3	2
	-3x-2=3x+5	6	32	17	6	3
	x=5+4x	2	12	4		1
	8x-8=-6x+8	3	42	15	2	2
	4x=9x		1	1		1
	-8+x=7		2			
	-6x=9	1	4	1		
Anzahl		151	719	301	124	61

Teiltabellen 103: Fehler in Abhängigkeit vom Umformungsschritt und der Anzahl der Umformungsschritte

		Anzahl der Fehler je Aufgabe				
		4 Fehler bei 4 Umfor-mungen	0 Fehler bei 5 Umfor-mungen	1 Fehler bei 5 Umfor-mungen	2 Fehler bei 5 Umfor-mungen	3 Fehler bei 5 Umfor-mungen
Test A	-8+x=7					
	-6x=9				1	
	3x-8=9x+1	1	10	3	5	
	3x+5=-3x-2		4	6	2	1
	2x-8=-7x-4	1			2	1
	-7x-7=-8x-5		1	1	2	
	4x+9=9x+5		2	2	2	
	-6x+8=8x-8		11	3	4	
	8x+5=6x+7					
	-3x+3=-6x-2	2	1	2	1	
	-7x+4=-6x+5			1		
	8x+9=0					
	-9x-6=5x-4	1	3	1	3	
	x=5+4x		3			
	-3x+8=-2x-6		1	1	1	
	4x=9x					
	3000x+4000=2000x+6000		2	1		1
	5x-5=2x-9	1	1			
Test B	-8x-5=-7x-7		1		1	
	-2x-6=-3x+8	1		1		
	5x-4=-9x-6	1	5		2	
	6x+7=8x+5	1	1	3	1	
	-7x-4=2x-8	2	1	1		
	9x+1=3x-8		11	3	2	
	-6x-2=-3x+3		2	1		2
	3000x+4000=2000x+6000	1	5		1	
	-6x+5=-7x+4		1			
	2x-9=5x-5		5	2		
	8x+9=0	1				
	9x+5=4x+9	1				
	-3x-2=3x+5		3	1	1	
	x=5+4x		1	1		
	8x-8=-6x+8	1	12	2		
	4x=9x	1				
	-8+x=7					
	-6x=9					
Anzahl		16	87	36	31	5

Teiltabellen 103: Fehler in Abhängigkeit vom Umformungsschritt und der Anzahl der Umformungsschritte

		Anzahl der Fehler je Aufgabe				
		4 Fehler bei 5 Umfor-mungen	5 Fehler bei 5 Umfor-mungen	0 Fehler bei 6 Umfor-mungen	2 Fehler bei 6 Umfor-mungen	3 Fehler bei 6 Umfor-mungen
Test A	-8+x=7					
	-6x=9					
	3x-8=9x+1			2		
	3x+5=-3x-2		1			
	2x-8=-7x-4					
	-7x-7=-8x-5					
	4x+9=9x+5					
	-6x+8=8x-8			3		
	8x+5=6x+7					1
	-3x+3=-6x-2					
	-7x+4=-6x+5					
	8x+9=0					
	-9x-6=5x-4					
	x=5+4x					
	-3x+8=-2x-6					
	4x=9x					
	3000x+4000=2000x+6000	1				
	5x-5=2x-9					
Test B	-8x-5=-7x-7	1				
	-2x-6=-3x+8					
	5x-4=-9x-6	1				
	6x+7=8x+5					
	-7x-4=2x-8			1		
	9x+1=3x-8	1				
	-6x-2=-3x+3			1		
	3000x+4000=2000x+6000				1	
	-6x+5=-7x+4			1		
	2x-9=5x-5	1				
	8x+9=0					
	9x+5=4x+9					
	-3x-2=3x+5					
	x=5+4x					
	8x-8=-6x+8					
	4x=9x			1		
	-8+x=7					
	-6x=9					
Anzahl		5	1	9	1	1

Teiltabellen 103: Fehler in Abhängigkeit vom Umformungsschritt und der Anzahl der Umformungsschritte

				Anzahl der Fehler je	
				0 Fehler bei 7 Umformungen	3 Fehler bei 7 Umformungen
	Test A		-8+x=7		
			-6x=9		
			3x-8=9x+1	1	1
			3x+5=-3x-2		
			2x-8=-7x-4	2	
			-7x-7=-8x-5		
			4x+9=9x+5		
			-6x+8=8x-8		
			8x+5=6x+7		
			-3x+3=-6x-2		
			-7x+4=-6x+5		
			8x+9=0		
			-9x-6=5x-4		
			x=5+4x		
			-3x+8=-2x-6		
			4x=9x		
			3000x+4000=2000x+6000		
			5x-5=2x-9		
	Test B		-8x-5=-7x-7		
			-2x-6=-3x+8		
			5x-4=-9x-6	1	
			6x+7=8x+5		
			-7x-4=2x-8		
			9x+1=3x-8		
			-6x-2=-3x+3		
			3000x+4000=2000x+6000		
			-6x+5=-7x+4		
			2x-9=5x-5		
			8x+9=0		
			9x+5=4x+9		
			-3x-2=3x+5		
			x=5+4x		
			8x-8=-6x+8		
			4x=9x		
			-8+x=7		
			-6x=9		
	Anzahl			4	1

Teiltabellen 103: Fehler in Abhängigkeit vom Umformungsschritt und der Anzahl der Umformungsschritte

				Fehler	erkannte Fehler
	Test A		-8+x=7	76	60
			-6x=9	228	224
			3x-8=9x+1	222	199
			3x+5=-3x-2	233	213
			2x-8=-7x-4	197	176
			-7x-7=-8x-5	124	106
			4x+9=9x+5	178	167
			-6x+8=8x-8	211	187
			8x+5=6x+7	118	106
			-3x+3=-6x-2	218	208
			-7x+4=-6x+5	142	121
			8x+9=0	218	198
			-9x-6=5x-4	231	209
			x=5+4x	262	236
			-3x+8=-2x-6	141	128
			4x=9x	202	146
			3000x+4000=2000x+6000	171	148
			5x-5=2x-9	219	207
	Test B		-8x-5=-7x-7	141	124
			-2x-6=-3x+8	96	83
			5x-4=-9x-6	221	197
			6x+7=8x+5	124	104
			-7x-4=2x-8	192	178
			9x+1=3x-8	214	194
			-6x-2=-3x+3	204	186
			3000x+4000=2000x+6000	137	115
			-6x+5=-7x+4	116	99
			2x-9=5x-5	200	185
			8x+9=0	181	163
			9x+5=4x+9	147	133
			-3x-2=3x+5	216	194
			x=5+4x	226	205
			8x-8=-6x+8	172	149
			4x=9x	189	145
			-8+x=7	52	44
			-6x=9	204	197
	Anzahl			6423	5734

Teiltabellen 104: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

				Fehlerart			
				Vorzeichen falsch	Vertau-schung von Addition und Subtraktion	Vertau-schung von Multiplika-tion und Division	Kehrwert gebildet
	Test A		-8+x=7	7	16		
			-6x=9	61	5	5	8
			3x-8=9x+1	64	39	3	11
			3x+5=-3x-2	74	50	2	12
			2x-8=-7x-4	26	30	2	22
			-7x-7=-8x-5	28	21		2
			4x+9=9x+5	23	20	1	14
			-6x+8=8x-8	28	46		13
			8x+5=6x+7	11	16	1	
			-3x+3=-6x-2	69	37	2	18
			-7x+4=-6x+5	52	21		
			8x+9=0	62	29	3	13
			-9x-6=5x-4	67	29	2	30
			x=5+4x	67	42	2	18
			-3x+8=-2x-6	58	20		
			4x=9x				
			3000x+4000=2000x+6000	9	10		5
			5x-5=2x-9	77	25	2	18
	Test B		-8x-5=-7x-7	47	21		1
			-2x-6=-3x+8	25	32		
			5x-4=-9x-6	77	33	4	33
			6x+7=8x+5	25	20	3	
			-7x-4=2x-8	50	34	1	22
			9x+1=3x-8	70	42	3	14
			-6x-2=-3x+3	75	27	3	24
			3000x+4000=2000x+6000	10	17	2	3
			-6x+5=-7x+4	53	18		
			2x-9=5x-5	71	29	3	13
			8x+9=0	46	34	2	12
			9x+5=4x+9	18	16	3	30
			-3x-2=3x+5	55	53	2	9
			x=5+4x	71	42	2	17
			8x-8=-6x+8	10	37	3	19
			4x=9x				
			-8+x=7	8	13		
			-6x=9	72		3	16
	Anzahl			1566	924	59	397

Teiltabellen 104: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

		Fehlerart			
		Vertau-schung von Addition und Division	Vertau-schung von x-Term mit Konstante	Rechen-fehler	nur eine Seite umgeformt
Test A	-8+x=7			3	9
	-6x=9	98	2	20	13
	3x-8=9x+1	16	2	16	22
	3x+5=-3x-2	14	1	30	16
	2x-8=-7x-4	10	1	37	10
	-7x-7=-8x-5	11		11	10
	4x+9=9x+5	15	2	38	13
	-6x+8=8x-8	13	4	44	6
	8x+5=6x+7	24	3	5	15
	-3x+3=-6x-2	14	1	28	11
	-7x+4=-6x+5	9	2	2	4
	8x+9=0	14		23	16
	-9x-6=5x-4	12		26	10
	x=5+4x	7	1	59	19
	-3x+8=-2x-6	3	1	8	13
	4x=9x	10			
	3000x+4000=2000x+6000	25		4	42
	5x-5=2x-9	13	1	22	14
Test B	-8x-5=-7x-7	8	1	15	17
	-2x-6=-3x+8	5		5	11
	5x-4=-9x-6	6	2	15	12
	6x+7=8x+5	20	1	9	14
	-7x-4=2x-8	7	2	34	11
	9x+1=3x-8	8	1	22	20
	-6x-2=-3x+3	6	2	21	18
	3000x+4000=2000x+6000	15	1	8	36
	-6x+5=-7x+4	4		1	7
	2x-9=5x-5	5	2	28	12
	8x+9=0	14	1	22	11
	9x+5=4x+9	6		16	13
	-3x-2=3x+5	18	1	27	16
	x=5+4x	5	2	49	14
	8x-8=-6x+8	9	2	33	6
	4x=9x	17			1
	-8+x=7			4	4
	-6x=9	40		15	16
Anzahl		501	39	700	482

Teiltabellen 104: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

		Fehlerart			
		Bearbeitung abgebrochen	Aufgabe nicht bearbeitet	weiterer algebraischer Fehler	Syntax verletzt
Test A	-8+x=7	3	1	5	23
	-6x=9	7	10	1	12
	3x-8=9x+1	5	7	15	20
	3x+5=-3x-2	9	8	3	18
	2x-8=-7x-4	10	13	10	15
	-7x-7=-8x-5		15	5	12
	4x+9=9x+5	13	12	11	11
	-6x+8=8x-8	11	11	7	12
	8x+5=6x+7	2	16	9	8
	-3x+3=-6x-2	8	17	2	15
	-7x+4=-6x+5	2	22	3	9
	8x+9=0	14	22	1	9
	-9x-6=5x-4	10	19	9	14
	x=5+4x	11	26	4	15
	-3x+8=-2x-6		22	6	9
	4x=9x	41	61		34
	3000x+4000=2000x+6000	2	31	7	15
	5x-5=2x-9	5	28	3	11
Test B	-8x-5=-7x-7	2	5	7	14
	-2x-6=-3x+8		4	4	4
	5x-4=-9x-6	13	7	5	8
	6x+7=8x+5	2	4	7	8
	-7x-4=2x-8	7	7	6	11
	9x+1=3x-8	8	8	7	11
	-6x-2=-3x+3	4	6	5	10
	3000x+4000=2000x+6000	1	9	8	8
	-6x+5=-7x+4		8	4	7
	2x-9=5x-5	7	10	3	12
	8x+9=0	9	16		7
	9x+5=4x+9	9	14	10	8
	-3x-2=3x+5	7	13	3	14
	x=5+4x	8	23	4	12
	8x-8=-6x+8	6	10	4	13
	4x=9x	47	54	1	25
	-8+x=7		13	1	8
	-6x=9	9	26		11
Anzahl		292	578	180	453

Teiltabellen 104: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehler	erkannte Fehler
erste Umformung	Test A	-8+x=7	32	23
		-6x=9	56	55
		3x-8=9x+1	64	48
		3x+5=-3x-2	52	44
		2x-8=-7x-4	45	34
		-7x-7=-8x-5	40	33
		4x+9=9x+5	41	35
		-6x+8=8x-8	56	44
		8x+5=6x+7	29	22
		-3x+3=-6x-2	47	42
		-7x+4=-6x+5	37	33
		8x+9=0	43	35
		-9x-6=5x-4	43	35
		x=5+4x	123	106
		-3x+8=-2x-6	39	33
		4x=9x	19	7
		3000x+4000=2000x+6000	33	24
		5x-5=2x-9	50	42
	Test B	-8x-5=-7x-7	54	41
		-2x-6=-3x+8	49	39
		5x-4=-9x-6	63	52
		6x+7=8x+5	41	32
		-7x-4=2x-8	62	56
		9x+1=3x-8	63	52
		-6x-2=-3x+3	51	40
		3000x+4000=2000x+6000	39	28
		-6x+5=-7x+4	48	39
		2x-9=5x-5	49	43
		8x+9=0	45	37
		9x+5=4x+9	40	33
		-3x-2=3x+5	49	41
		x=5+4x	106	92
		8x-8=-6x+8	42	32
		4x=9x	20	9
		-8+x=7	11	8
		-6x=9	26	24
	Anzahl		1707	1393

Teiltabellen 105a: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt				Fehlerart		
				Vorzeichen falsch	Vertau-schung von Addition und Subtraktion	Vertau-schung von Multiplika-tion und Division
erste Umformung		Test A	-8+x=7	2	5	
			-6x=9	7		1
			3x-8=9x+1	8	25	
			3x+5=-3x-2	12	27	
			2x-8=-7x-4	12	16	
			-7x-7=-8x-5	11	14	
			4x+9=9x+5	9	16	
			-6x+8=8x-8	14	29	
			8x+5=6x+7	8	10	
			-3x+3=-6x-2	19	19	
			-7x+4=-6x+5	17	11	
			8x+9=0		27	
			-9x-6=5x-4	13	20	
			x=5+4x	40	40	
			-3x+8=-2x-6	19	10	
			4x=9x			
			3000x+4000=2000x+6000	7	9	
			5x-5=2x-9	24	15	
		Test B	-8x-5=-7x-7	17	17	
			-2x-6=-3x+8	16	18	
			5x-4=-9x-6	23	23	
			6x+7=8x+5	10	15	
			-7x-4=2x-8	23	22	
			9x+1=3x-8	12	24	
			-6x-2=-3x+3	18	15	
			3000x+4000=2000x+6000	10	10	
			-6x+5=-7x+4	24	9	
			2x-9=5x-5	15	18	
			8x+9=0		30	
			9x+5=4x+9	14	11	
			-3x-2=3x+5	9	25	
			x=5+4x	41	39	
			8x-8=-6x+8	4	21	
			4x=9x			
			-8+x=7	1	3	
			-6x=9	13		
		Anzahl		472	593	1

Teiltabellen 105a: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehlerart: Kehrwert gebildet	Fehlerart: Vertau-schung von Addition und Division	Fehlerart: Vertau-schung von x-Term mit Konstante
erste Umformung	Test A	-8+x=7			
erste Umformung	Test A	-6x=9	1	32	
erste Umformung	Test A	3x-8=9x+1			1
erste Umformung	Test A	3x+5=-3x-2			1
erste Umformung	Test A	2x-8=-7x-4			1
erste Umformung	Test A	-7x-7=-8x-5			
erste Umformung	Test A	4x+9=9x+5			1
erste Umformung	Test A	-6x+8=8x-8			4
erste Umformung	Test A	8x+5=6x+7			2
erste Umformung	Test A	-3x+3=-6x-2			1
erste Umformung	Test A	-7x+4=-6x+5			2
erste Umformung	Test A	8x+9=0			
erste Umformung	Test A	-9x-6=5x-4			
erste Umformung	Test A	x=5+4x		1	
erste Umformung	Test A	-3x+8=-2x-6			1
erste Umformung	Test A	4x=9x		1	
erste Umformung	Test A	3000x+4000=2000x+6000			
erste Umformung	Test A	5x-5=2x-9			1
erste Umformung	Test B	-8x-5=-7x-7			1
erste Umformung	Test B	-2x-6=-3x+8			
erste Umformung	Test B	5x-4=-9x-6			2
erste Umformung	Test B	6x+7=8x+5			1
erste Umformung	Test B	-7x-4=2x-8			2
erste Umformung	Test B	9x+1=3x-8			1
erste Umformung	Test B	-6x-2=-3x+3			2
erste Umformung	Test B	3000x+4000=2000x+6000			1
erste Umformung	Test B	-6x+5=-7x+4			
erste Umformung	Test B	2x-9=5x-5			2
erste Umformung	Test B	8x+9=0		1	1
erste Umformung	Test B	9x+5=4x+9			
erste Umformung	Test B	-3x-2=3x+5			1
erste Umformung	Test B	x=5+4x		1	2
erste Umformung	Test B	8x-8=-6x+8			2
erste Umformung	Test B	4x=9x		1	
erste Umformung	Test B	-8+x=7			
erste Umformung	Test B	-6x=9	2	3	
erste Umformung	Anzahl		3	40	33

Teiltabellen 105a: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehlerart: Rechen-fehler	Fehlerart: nur eine Seite umgeformt	Fehlerart: Bearbei-tung abge-brochen
erste Umformung	Test A	-8+x=7		4	
		-6x=9	6	2	
		3x-8=9x+1	3	3	
		3x+5=-3x-2	7	1	
		2x-8=-7x-4	1	1	
		-7x-7=-8x-5	5	2	
		4x+9=9x+5	5	1	
		-6x+8=8x-8	1		
		8x+5=6x+7	2		
		-3x+3=-6x-2	4	1	
		-7x+4=-6x+5	2		
		8x+9=0		6	
		-9x-6=5x-4	1		
		x=5+4x	41	3	
		-3x+8=-2x-6	2		
		4x=9x			
		3000x+4000=2000x+6000			
		5x-5=2x-9	1		
	Test B	-8x-5=-7x-7	2	2	
		-2x-6=-3x+8	3	1	
		5x-4=-9x-6		1	
		6x+7=8x+5		1	
		-7x-4=2x-8	2	2	
		9x+1=3x-8	7	4	
		-6x-2=-3x+3	2	3	
		3000x+4000=2000x+6000		2	
		-6x+5=-7x+4		3	
		2x-9=5x-5	2	2	
		8x+9=0		4	
		9x+5=4x+9	4	1	
		-3x-2=3x+5	11	3	
		x=5+4x	31	4	
		8x-8=-6x+8			
		4x=9x			
		-8+x=7		1	
		-6x=9	1	3	
	Anzahl		146	61	

Teiltabellen 105a: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehlerart		
			Aufgabe nicht bearbeitet	weiterer alge-braischer Fehler	Syntax verletzt
erste Umformung	Test A	-8+x=7		3	12
		-6x=9		1	6
		3x-8=9x+1		6	5
		3x+5=-3x-2		2	1
		2x-8=-7x-4		2	2
		-7x-7=-8x-5		2	2
		4x+9=9x+5		3	1
		-6x+8=8x-8			1
		8x+5=6x+7		2	1
		-3x+3=-6x-2			1
		-7x+4=-6x+5			1
		8x+9=0		1	2
		-9x-6=5x-4			2
		x=5+4x			7
		-3x+8=-2x-6			2
		4x=9x			6
		3000x+4000=2000x+6000		1	7
		5x-5=2x-9			2
	Test B	-8x-5=-7x-7		1	3
		-2x-6=-3x+8		2	2
		5x-4=-9x-6		3	1
		6x+7=8x+5		2	4
		-7x-4=2x-8		2	4
		9x+1=3x-8		4	4
		-6x-2=-3x+3		1	2
		3000x+4000=2000x+6000		4	3
		-6x+5=-7x+4		2	3
		2x-9=5x-5		3	3
		8x+9=0			2
		9x+5=4x+9		2	3
		-3x-2=3x+5		2	3
		x=5+4x		3	6
		8x-8=-6x+8		1	4
		4x=9x			8
		-8+x=7		1	4
		-6x=9			3
	Anzahl			56	123

Teiltabellen 105a: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt				Fehler	erkannte Fehler
mittlere Umformung		Test A	-8+x=7	6	6
			-6x=9	10	8
			3x-8=9x+1	61	56
			3x+5=-3x-2	46	39
			2x-8=-7x-4	36	29
			-7x-7=-8x-5	24	18
			4x+9=9x+5	36	35
			-6x+8=8x-8	41	37
			8x+5=6x+7	19	16
			-3x+3=-6x-2	45	42
			-7x+4=-6x+5	25	18
			8x+9=0	9	9
			-9x-6=5x-4	43	40
			x=5+4x	20	17
			-3x+8=-2x-6	29	27
			4x=9x	8	5
			3000x+4000=2000x+6000	12	7
			5x-5=2x-9	34	32
		Test B	-8x-5=-7x-7	28	24
			-2x-6=-3x+8	16	13
			5x-4=-9x-6	35	30
			6x+7=8x+5	29	21
			-7x-4=2x-8	40	33
			9x+1=3x-8	59	53
			-6x-2=-3x+3	40	36
			3000x+4000=2000x+6000	19	14
			-6x+5=-7x+4	18	13
			2x-9=5x-5	39	35
			8x+9=0	2	2
			9x+5=4x+9	24	21
			-3x-2=3x+5	32	28
			x=5+4x	12	12
			8x-8=-6x+8	30	24
			4x=9x	4	2
			-8+x=7	1	
			-6x=9	3	3
		Anzahl		935	805

Teiltabellen 105b: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehlerart		
			Vorzeichen falsch	Vertau-schung von Addition und Subtraktion	Vertau-schung von Multiplika-tion und Division
mittlere Umformung	Test A	-8+x=7	1	1	
		-6x=9	3	3	
		3x-8=9x+1	21	12	
		3x+5=-3x-2	14	10	
		2x-8=-7x-4	7	10	
		-7x-7=-8x-5	6	3	
		4x+9=9x+5	8	4	
		-6x+8=8x-8	7	11	
		8x+5=6x+7	1	4	
		-3x+3=-6x-2	14	17	
		-7x+4=-6x+5	6	8	
		8x+9=0	5		
		-9x-6=5x-4	15	8	
		x=5+4x	6	2	
		-3x+8=-2x-6	11	6	
		4x=9x			
		3000x+4000=2000x+6000		1	
		5x-5=2x-9	16	10	
	Test B	-8x-5=-7x-7	7	3	
		-2x-6=-3x+8	2	5	
		5x-4=-9x-6	16	9	
		6x+7=8x+5	7	4	
		-7x-4=2x-8	16	8	
		9x+1=3x-8	20	16	
		-6x-2=-3x+3	12	9	
		3000x+4000=2000x+6000		6	
		-6x+5=-7x+4	7	2	
		2x-9=5x-5	18	9	
		8x+9=0	2		
		9x+5=4x+9	2	4	
		-3x-2=3x+5	12	10	
		x=5+4x	6	2	
		8x-8=-6x+8	6	9	
		4x=9x			
		-8+x=7			
		-6x=9	2		
	Anzahl		276	206	

Teiltabellen 105b: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehlerart		
			Kehrwert gebildet	Vertau-schung von Addition und Division	Vertau-schung von x-Term mit Konstante
mittlere Umformung	Test A	-8+x=7			
		-6x=9			
		3x-8=9x+1	2	4	1
		3x+5=-3x-2	1	3	
		2x-8=-7x-4	2	1	
		-7x-7=-8x-5		3	
		4x+9=9x+5	3	2	1
		-6x+8=8x-8	2	2	
		8x+5=6x+7		2	
		-3x+3=-6x-2		5	
		-7x+4=-6x+5		2	
		8x+9=0		1	
		-9x-6=5x-4	4	1	
		x=5+4x	1		1
		-3x+8=-2x-6		1	
		4x=9x			
		3000x+4000=2000x+6000		1	
		5x-5=2x-9		1	
	Test B	-8x-5=-7x-7		1	
		-2x-6=-3x+8		1	
		5x-4=-9x-6	1	2	
		6x+7=8x+5		2	
		-7x-4=2x-8	2	1	
		9x+1=3x-8	4	3	
		-6x-2=-3x+3		2	
		3000x+4000=2000x+6000		2	
		-6x+5=-7x+4			
		2x-9=5x-5		2	
		8x+9=0			
		9x+5=4x+9	4		
		-3x-2=3x+5		2	
		x=5+4x		1	
		8x-8=-6x+8	3		
		4x=9x			
		-8+x=7			
		-6x=9		1	
	Anzahl		29	49	3

Teiltabellen 105b: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt					Fehlerart		
					Rechen-fehler	nur eine Seite umgeformt	Bearbei-tung abge-brochen
mittlere Umformung		Test A		-8+x=7	1		
				-6x=9			
				3x-8=9x+1	2	13	
				3x+5=-3x-2	1	8	
				2x-8=-7x-4	2	4	
				-7x-7=-8x-5	1	5	
				4x+9=9x+5	5	6	
				-6x+8=8x-8	5	5	
				8x+5=6x+7		3	
				-3x+3=-6x-2		7	
				-7x+4=-6x+5		3	
				8x+9=0	1	1	
				-9x-6=5x-4	3	2	
				x=5+4x	1	7	
				-3x+8=-2x-6		7	
				4x=9x			
				3000x+4000=2000x+6000		2	
				5x-5=2x-9		7	
		Test B		-8x-5=-7x-7	2	4	
				-2x-6=-3x+8	1	4	
				5x-4=-9x-6	1	5	
				6x+7=8x+5		8	
				-7x-4=2x-8	2	7	
				9x+1=3x-8	1	8	
				-6x-2=-3x+3	2	11	
				3000x+4000=2000x+6000	1	3	
				-6x+5=-7x+4	1	1	
				2x-9=5x-5	2	4	
				8x+9=0			
				9x+5=4x+9	2	6	
				-3x-2=3x+5		6	
				x=5+4x	2	2	
				8x-8=-6x+8	2	3	
				4x=9x			
				-8+x=7			
				-6x=9		1	
		Anzahl			41	153	

Teiltabellen 105b: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt				Aufgabe nicht bearbeitet	weiterer alge-braischer Fehler	Syntax verletzt
				Fehlerart		
mittlere Umformung		Test A	-8+x=7		1	2
			-6x=9			2
			3x-8=9x+1		5	8
			3x+5=-3x-2		1	6
			2x-8=-7x-4		3	6
			-7x-7=-8x-5			3
			4x+9=9x+5		4	5
			-6x+8=8x-8		3	4
			8x+5=6x+7		2	4
			-3x+3=-6x-2		1	4
			-7x+4=-6x+5		2	2
			8x+9=0			2
			-9x-6=5x-4		6	6
			x=5+4x		1	3
			-3x+8=-2x-6		4	3
			4x=9x			5
			3000x+4000=2000x+6000		2	2
			5x-5=2x-9		1	4
		Test B	-8x-5=-7x-7		3	7
			-2x-6=-3x+8		1	1
			5x-4=-9x-6		1	2
			6x+7=8x+5		5	2
			-7x-4=2x-8		3	2
			9x+1=3x-8		2	5
			-6x-2=-3x+3		2	2
			3000x+4000=2000x+6000		2	1
			-6x+5=-7x+4			2
			2x-9=5x-5			3
			8x+9=0			
			9x+5=4x+9		5	2
			-3x-2=3x+5			1
			x=5+4x			
			8x-8=-6x+8		3	1
			4x=9x			2
			-8+x=7			
			-6x=9			
		Anzahl			63	104

Teiltabellen 105b: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt				Fehler	erkannte Fehler
letzte Umformung		Test A	-8+x=7	6	6
			-6x=9	18	18
			3x-8=9x+1	83	82
			3x+5=-3x-2	106	105
			2x-8=-7x-4	95	93
			-7x-7=-8x-5	34	32
			4x+9=9x+5	81	80
			-6x+8=8x-8	92	86
			8x+5=6x+7	49	48
			-3x+3=-6x-2	103	102
			-7x+4=-6x+5	47	38
			8x+9=0	124	124
			-9x-6=5x-4	119	111
			x=5+4x	70	69
			-3x+8=-2x-6	37	33
			4x=9x	35	19
			3000x+4000=2000x+6000	83	78
			5x-5=2x-9	103	102
		Test B	-8x-5=-7x-7	42	42
			-2x-6=-3x+8	24	24
			5x-4=-9x-6	113	105
			6x+7=8x+5	45	42
			-7x-4=2x-8	80	79
			9x+1=3x-8	80	77
			-6x-2=-3x+3	104	102
			3000x+4000=2000x+6000	64	60
			-6x+5=-7x+4	37	34
			2x-9=5x-5	98	94
			8x+9=0	98	97
			9x+5=4x+9	65	62
			-3x-2=3x+5	100	94
			x=5+4x	65	63
			8x-8=-6x+8	82	77
			4x=9x	38	25
			-8+x=7	2	2
			-6x=9	18	16
		Anzahl		2440	2321

Teiltabellen 105c: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehlerart		
			Vorzeichen falsch	Vertau-schung von Addition und Subtraktion	Vertau-schung von Multiplika-tion und Division
letzte Umformung	Test A	-8+x=7	1	1	
		-6x=9	7	1	
		3x-8=9x+1	35	1	3
		3x+5=-3x-2	48	5	2
		2x-8=-7x-4	6	2	2
		-7x-7=-8x-5	9	3	
		4x+9=9x+5	6		1
		-6x+8=8x-8	7	1	
		8x+5=6x+7	2	1	1
		-3x+3=-6x-2	35	1	2
		-7x+4=-6x+5	23		
		8x+9=0	57	1	3
		-9x-6=5x-4	38	1	2
		x=5+4x	21		2
		-3x+8=-2x-6	19	3	
		4x=9x			
		3000x+4000=2000x+6000	2		
		5x-5=2x-9	37		2
	Test B	-8x-5=-7x-7	19		
		-2x-6=-3x+8	6	8	
		5x-4=-9x-6	38		4
		6x+7=8x+5	8		3
		-7x-4=2x-8	11	2	1
		9x+1=3x-8	38		3
		-6x-2=-3x+3	44	3	3
		3000x+4000=2000x+6000			2
		-6x+5=-7x+4	20	5	
		2x-9=5x-5	38	1	3
		8x+9=0	43		2
		9x+5=4x+9	2		3
		-3x-2=3x+5	34	7	2
		x=5+4x	23		2
		8x-8=-6x+8		3	3
		4x=9x			
		-8+x=7	2		
		-6x=9	10		
	Anzahl		689	50	51

Teiltabellen 105c: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehlerart		
			Kehrwert gebildet	Vertau-schung von Addition und Division	Vertau-schung von x-Term mit Konstante
letzte Umformung	Test A	-8+x=7			
		-6x=9	3	2	1
		3x-8=9x+1	9	12	
		3x+5=-3x-2	11	11	
		2x-8=-7x-4	20	9	
		-7x-7=-8x-5	2	8	
		4x+9=9x+5	11	13	
		-6x+8=8x-8	11	11	
		8x+5=6x+7		22	1
		-3x+3=-6x-2	18	9	
		-7x+4=-6x+5		7	
		8x+9=0	13	13	
		-9x-6=5x-4	26	11	
		x=5+4x	17	5	
		-3x+8=-2x-6		2	
		4x=9x		8	
		3000x+4000=2000x+6000	5	24	
		5x-5=2x-9	18	12	
	Test B	-8x-5=-7x-7	1	7	
		-2x-6=-3x+8		4	
		5x-4=-9x-6	32	4	
		6x+7=8x+5		18	
		-7x-4=2x-8	20	6	
		9x+1=3x-8	10	4	
		-6x-2=-3x+3	24	4	
		3000x+4000=2000x+6000	3	13	
		-6x+5=-7x+4		4	
		2x-9=5x-5	13	3	
		8x+9=0	12	13	
		9x+5=4x+9	26	6	
		-3x-2=3x+5	9	16	
		x=5+4x	17	3	
		8x-8=-6x+8	16	9	
		4x=9x		16	
		-8+x=7			
		-6x=9	3		
	Anzahl		350	309	2

Teiltabellen 105c: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehlerart		
			Rechen-fehler	nur eine Seite umgeformt	Bearbei-tung abge-brochen
letzte Umformung	Test A	-8+x=7		3	
		-6x=9	3	6	
		3x-8=9x+1	11	6	5
		3x+5=-3x-2	20	7	4
		2x-8=-7x-4	33	5	9
		-7x-7=-8x-5	5	3	
		4x+9=9x+5	28	6	11
		-6x+8=8x-8	38	1	10
		8x+5=6x+7	3	12	2
		-3x+3=-6x-2	24	3	7
		-7x+4=-6x+5		1	2
		8x+9=0	21	9	10
		-9x-6=5x-4	22	8	10
		x=5+4x	16	4	4
		-3x+8=-2x-6	6	6	
		4x=9x			5
		3000x+4000=2000x+6000	4	40	
		5x-5=2x-9	21	7	5
	Test B	-8x-5=-7x-7	10	11	
		-2x-6=-3x+8	1	6	
		5x-4=-9x-6	14	6	12
		6x+7=8x+5	9	5	
		-7x-4=2x-8	30	2	7
		9x+1=3x-8	14	8	8
		-6x-2=-3x+3	17	4	4
		3000x+4000=2000x+6000	7	31	1
		-6x+5=-7x+4		3	
		2x-9=5x-5	24	5	7
		8x+9=0	22	6	7
		9x+5=4x+9	10	5	9
		-3x-2=3x+5	14	7	3
		x=5+4x	11	2	7
		8x-8=-6x+8	31	3	5
		4x=9x		1	5
		-8+x=7		1	
		-6x=9		7	
	Anzahl		469	240	159

Teiltabellen 105c: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehlerart		
			Aufgabe nicht bearbeitet	weiterer alge-braischer Fehler	Syntax verletzt
letzte Umformung	Test A	-8+x=7		1	1
		-6x=9			1
		3x-8=9x+1		3	3
		3x+5=-3x-2			7
		2x-8=-7x-4		5	4
		-7x-7=-8x-5		3	2
		4x+9=9x+5		4	2
		-6x+8=8x-8		4	4
		8x+5=6x+7		5	
		-3x+3=-6x-2		1	7
		-7x+4=-6x+5		1	4
		8x+9=0			3
		-9x-6=5x-4		3	3
		x=5+4x		1	2
		-3x+8=-2x-6		2	1
		4x=9x			6
		3000x+4000=2000x+6000		4	
		5x-5=2x-9		2	2
	Test B	-8x-5=-7x-7		3	
		-2x-6=-3x+8		1	
		5x-4=-9x-6		1	4
		6x+7=8x+5			
		-7x-4=2x-8		1	4
		9x+1=3x-8		1	1
		-6x-2=-3x+3		2	5
		3000x+4000=2000x+6000		2	1
		-6x+5=-7x+4		2	1
		2x-9=5x-5			5
		8x+9=0			2
		9x+5=4x+9		2	2
		-3x-2=3x+5		1	7
		x=5+4x			4
		8x-8=-6x+8			7
		4x=9x		1	2
		-8+x=7			
		-6x=9			1
	Anzahl			56	98

Teiltabellen 105c: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt				Fehler	erkannte Fehler
nur eine Umformung		Test A	-8+x=7	29	22
			-6x=9	132	131
			3x-8=9x+1	7	6
			3x+5=-3x-2	16	12
			2x-8=-7x-4	7	6
			-7x-7=-8x-5	11	8
			4x+9=9x+5	6	3
			-6x+8=8x-8	10	8
			8x+5=6x+7	5	4
			-3x+3=-6x-2	5	4
			-7x+4=-6x+5	11	10
			8x+9=0	16	4
			-9x-6=5x-4	7	4
			x=5+4x	17	12
			-3x+8=-2x-6	14	13
			4x=9x	43	18
			3000x+4000=2000x+6000	10	6
			5x-5=2x-9	4	3
		Test B	-8x-5=-7x-7	10	10
			-2x-6=-3x+8	3	3
			5x-4=-9x-6	2	2
			6x+7=8x+5	3	3
			-7x-4=2x-8	3	3
			9x+1=3x-8	4	4
			-6x-2=-3x+3	3	2
			3000x+4000=2000x+6000	6	4
			-6x+5=-7x+4	5	5
			2x-9=5x-5	4	3
			8x+9=0	18	9
			9x+5=4x+9	4	3
			-3x-2=3x+5	18	14
			x=5+4x	19	14
			8x-8=-6x+8	7	5
			4x=9x	31	13
			-8+x=7	25	21
			-6x=9	127	124
		Anzahl		642	516

Teiltabellen 105d: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt				Fehlerart		
				Vorzeichen falsch	Vertau-schung von Addition und Subtraktion	Vertau-schung von Multiplika-tion und Division
nur eine Umformung		Test A	-8+x=7	3	9	
			-6x=9	44	1	4
			3x-8=9x+1		1	
			3x+5=-3x-2		8	
			2x-8=-7x-4	1	2	
			-7x-7=-8x-5	2	1	
			4x+9=9x+5			
			-6x+8=8x-8		5	
			8x+5=6x+7		1	
			-3x+3=-6x-2	1		
			-7x+4=-6x+5	6	2	
			8x+9=0		1	
			-9x-6=5x-4	1		
			x=5+4x			
			-3x+8=-2x-6	9	1	
			4x=9x			
			3000x+4000=2000x+6000			
			5x-5=2x-9			
		Test B	-8x-5=-7x-7	4	1	
			-2x-6=-3x+8	1	1	
			5x-4=-9x-6		1	
			6x+7=8x+5		1	
			-7x-4=2x-8		2	
			9x+1=3x-8		2	
			-6x-2=-3x+3	1		
			3000x+4000=2000x+6000		1	
			-6x+5=-7x+4	2	2	
			2x-9=5x-5		1	
			8x+9=0	1	4	
			9x+5=4x+9		1	
			-3x-2=3x+5		11	
			x=5+4x	1	1	
			8x-8=-6x+8		4	
			4x=9x			
			-8+x=7	5	10	
			-6x=9	47		3
		Anzahl		129	75	7

Teiltabellen 105d: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

			Fehlerart		
1. Fehler im Umformungsschritt			Kehrwert gebildet	Vertauschung von Addition und Division	Vertauschung von x-Term mit Konstante
nur eine Umformung	Test A	-8+x=7			
		-6x=9	4	64	1
		3x-8=9x+1			
		3x+5=-3x-2			
		2x-8=-7x-4			
		-7x-7=-8x-5			
		4x+9=9x+5			
		-6x+8=8x-8			
		8x+5=6x+7			
		-3x+3=-6x-2			
		-7x+4=-6x+5			
		8x+9=0			
		-9x-6=5x-4			
		x=5+4x		1	
		-3x+8=-2x-6			
		4x=9x		1	
		3000x+4000=2000x+6000			
		5x-5=2x-9			
	Test B	-8x-5=-7x-7			
		-2x-6=-3x+8			
		5x-4=-9x-6			
		6x+7=8x+5			
		-7x-4=2x-8			
		9x+1=3x-8		1	
		-6x-2=-3x+3			
		3000x+4000=2000x+6000			
		-6x+5=-7x+4			
		2x-9=5x-5			
		8x+9=0			
		9x+5=4x+9			
		-3x-2=3x+5			
		x=5+4x			
		8x-8=-6x+8			
		4x=9x			
		-8+x=7			
		-6x=9	11	36	
	Anzahl		15	103	1

Teiltabellen 105d: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehlerart		
			Rechen-fehler	nur eine Seite umgeformt	Bearbei-tung abge-brochen
nur eine Umformung	Test A	-8+x=7	2	2	1
		-6x=9	11	5	5
		3x-8=9x+1			
		3x+5=-3x-2	2		
		2x-8=-7x-4	1		
		-7x-7=-8x-5			
		4x+9=9x+5			
		-6x+8=8x-8			
		8x+5=6x+7			
		-3x+3=-6x-2			
		-7x+4=-6x+5			
		8x+9=0	1		
		-9x-6=5x-4			
		x=5+4x	1	5	1
		-3x+8=-2x-6			
		4x=9x			
		3000x+4000=2000x+6000			
		5x-5=2x-9			
	Test B	-8x-5=-7x-7	1		
		-2x-6=-3x+8			
		5x-4=-9x-6			
		6x+7=8x+5			
		-7x-4=2x-8			
		9x+1=3x-8			
		-6x-2=-3x+3			
		3000x+4000=2000x+6000			
		-6x+5=-7x+4			
		2x-9=5x-5		1	
		8x+9=0		1	
		9x+5=4x+9		1	
		-3x-2=3x+5	2		
		x=5+4x	5	6	
		8x-8=-6x+8			
		4x=9x			
		-8+x=7	4	2	
		-6x=9	14	5	5
	Anzahl		44	28	12

Teiltabellen 105d: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt					Fehlerart		
					Aufgabe nicht bearbeitet	weiterer alge-braischer Fehler	Syntax verletzt
nur eine Umformung		Test A		-8+x=7			8
				-6x=9			3
				3x-8=9x+1		1	4
				3x+5=-3x-2			4
				2x-8=-7x-4			3
				-7x-7=-8x-5			5
				4x+9=9x+5			3
				-6x+8=8x-8			3
				8x+5=6x+7			3
				-3x+3=-6x-2			3
				-7x+4=-6x+5			2
				8x+9=0			2
				-9x-6=5x-4			3
				x=5+4x		2	3
				-3x+8=-2x-6			3
				4x=9x			17
				3000x+4000=2000x+6000			6
				5x-5=2x-9			3
		Test B		-8x-5=-7x-7			4
				-2x-6=-3x+8			1
				5x-4=-9x-6			1
				6x+7=8x+5			2
				-7x-4=2x-8			1
				9x+1=3x-8			1
				-6x-2=-3x+3			1
				3000x+4000=2000x+6000			3
				-6x+5=-7x+4			1
				2x-9=5x-5			1
				8x+9=0			3
				9x+5=4x+9		1	1
				-3x-2=3x+5			3
				x=5+4x		1	2
				8x-8=-6x+8			1
				4x=9x			13
				-8+x=7			4
				-6x=9			7
		Anzahl				5	128

Teiltabellen 105d: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

Erster Fehler		Fehler bei Umformungen
bei erster Umformung	Vorzeichen falsch	472
	Vertauschung von Addition und Subtraktion	593
	Vertauschung von Multiplikation und Division	1
	Kehrwert gebildet	3
	Vertauschung vom Addition und Division	40
	Vertauschung von x-Term mit Konstante	33
	Rechenfehler	146
	nur eine Seite umgeformt	61
	Bearbeitung abgebrochen	
	Aufgabe nicht bearbeitet	
	weiterer algebraischer Fehler	56
	Syntax verletzt	123
	Gesamt: Anzahl	1393
bei mittlerer Umformung	Vorzeichen falsch	276
	Vertauschung von Addition und Subtraktion	206
	Vertauschung von Multiplikation und Division	
	Kehrwert gebildet	29
	Vertauschung vom Addition und Division	49
	Vertauschung von x-Term mit Konstante	3
	Rechenfehler	41
	nur eine Seite umgeformt	153
	Bearbeitung abgebrochen	
	Aufgabe nicht bearbeitet	
	weiterer algebraischer Fehler	63
	Syntax verletzt	104
	Gesamt: Anzahl	805
bei letzter Umformung	Vorzeichen falsch	818
	Vertauschung von Addition und Subtraktion	125
	Vertauschung von Multiplikation und Division	58
	Kehrwert gebildet	365
	Vertauschung vom Addition und Division	412
	Vertauschung von x-Term mit Konstante	3
	Rechenfehler	513
	nur eine Seite umgeformt	268
	Bearbeitung abgebrochen	171
	Aufgabe nicht bearbeitet	
	weiterer algebraischer Fehler	61
	Syntax verletzt	226
	Gesamt: Anzahl	2837

Tabelle 106: Fehler nach Fehlerklassifikation
gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

		Gesamt anzahl falsch	1. Fehler bei Umformungsstrategie				
			nicht erkenn-bar, keine Verein-fachung	x-Term nach rechts	x-Term nach links	Kons-tante nach rechts	Kons-tante nach links
Test A	-8+x=7	77	40	5		30	2
	-6x=9	228	224				2
	3x-8=9x+1	240	153	23	20	24	19
	3x+5=-3x-2	247	165	15	17	33	10
	2x-8=-7x-4	213	144	15	10	32	9
	-7x-7=-8x-5	128	70	9	13	25	9
	4x+9=9x+5	195	131	16	15	17	13
	-6x+8=8x-8	232	148	17	22	24	11
	8x+5=6x+7	125	90	3	12	15	4
	-3x+3=-6x-2	232	154	17	18	31	11
	-7x+4=-6x+5	143	88	4	28	16	6
	8x+9=0	231	164	6		59	1
	-9x-6=5x-4	242	178	10	22	16	13
	x=5+4x	264	134	1	108	2	18
	-3x+8=-2x-6	145	87	5	22	21	9
	4x=9x	258	255				
	3000x+4000=2000x+6000	176	138	3	11	21	1
	5x-5=2x-9	238	165	2	20	37	13
Test B	-8x-5=-7x-7	144	80	6	20	27	11
	-2x-6=-3x+8	103	40	11	16	20	16
	5x-4=-9x-6	240	161	8	28	32	10
	6x+7=8x+5	133	79	6	18	18	11
	-7x-4=2x-8	211	132	11	36	21	11
	9x+1=3x-8	224	145	6	26	38	9
	-6x-2=-3x+3	216	148	6	30	20	11
	3000x+4000=2000x+6000	144	97	5	13	22	5
	-6x+5=-7x+4	117	55	13	19	18	11
	2x-9=5x-5	217	146	11	21	23	15
	8x+9=0	192	136	4		52	
	9x+5=4x+9	159	106	2	14	29	8
	-3x-2=3x+5	224	136	11	39	14	15
	x=5+4x	236	122	2	93		17
	8x-8=-6x+8	193	121	8	21	29	8
	4x=9x	261	255	1			
	-8+x=7	52	27	4		21	
	-6x=9	207	203		1	1	
	Anzahl	6887	4717	266	733	788	309

Teiltabellen 107: Verteilung der Fehler nach Umformungsstrategie ("bei welcher Umformungsstrategie erfolgte der erste Fehler", nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

		1. Fehler bei Umformungsstrategie		
		Term-umfor-mung (-verein-fachung)	x-Terme weg-gelassen	Kons-tanten weg-gelassen
Test A	-8+x=7			
	-6x=9	2		
	3x-8=9x+1	1		
	3x+5=-3x-2		7	
	2x-8=-7x-4	2		1
	-7x-7=-8x-5	1		1
	4x+9=9x+5	2		1
	-6x+8=8x-8			10
	8x+5=6x+7	1		
	-3x+3=-6x-2	1		
	-7x+4=-6x+5		1	
	8x+9=0	1		
	-9x-6=5x-4			3
	x=5+4x	1		
	-3x+8=-2x-6			1
	4x=9x	3		
	3000x+4000=2000x+6000			2
	5x-5=2x-9			1
Test B	-8x-5=-7x-7			
	-2x-6=-3x+8			
	5x-4=-9x-6			1
	6x+7=8x+5			1
	-7x-4=2x-8			
	9x+1=3x-8			
	-6x-2=-3x+3			1
	3000x+4000=2000x+6000			2
	-6x+5=-7x+4			1
	2x-9=5x-5			1
	8x+9=0			
	9x+5=4x+9			
	-3x-2=3x+5		9	
	x=5+4x	2		
	8x-8=-6x+8			6
	4x=9x	5		
	-8+x=7			
	-6x=9	2		
Anzahl		24	17	33

Teiltabellen 107: Verteilung der Fehler nach Umformungsstrategie ("bei welcher Umformungsstrategie erfolgte der erste Fehler", nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

			erste Umformung				
		gesamt	x-Term nach rechts	x-Term nach links	Konstante nach rechts	Konstante nach links	andere
Test A	-8+x=7	441	5		297		139
	-6x=9	441					441
	3x-8=9x+1	441	126	129	129	30	27
	3x+5=-3x-2	441	40	235	74	51	41
	2x-8=-7x-4	441	39	252	90	34	26
	-7x-7=-8x-5	441	34	157	96	30	124
	4x+9=9x+5	441	141	151	67	57	25
	-6x+8=8x-8	441	148	153	64	42	34
	8x+5=6x+7	441	20	267	109	15	30
	-3x+3=-6x-2	441	59	244	62	47	29
	-7x+4=-6x+5	441	93	112	92	15	129
	8x+9=0	441	18		369		54
	-9x-6=5x-4	441	126	164	90	27	34
	x=5+4x	441		295		25	121
	-3x+8=-2x-6	441	82	108	61	56	134
	4x=9x	441					441
	3000x+4000=2000x+6000	441	18	244	102	10	67
	5x-5=2x-9	441	20	256	83	43	39
Test B	-8x-5=-7x-7	423	62	161	74	32	94
	-2x-6=-3x+8	423	40	190	82	18	93
	5x-4=-9x-6	423	32	278	68	24	21
	6x+7=8x+5	423	128	179	59	40	17
	-7x-4=2x-8	423	123	181	65	34	20
	9x+1=3x-8	423	19	276	70	40	18
	-6x-2=-3x+3	423	92	212	84	20	15
	3000x+4000=2000x+6000	423	16	268	87	13	39
	-6x+5=-7x+4	423	33	196	52	41	101
	2x-9=5x-5	423	122	183	71	27	20
	8x+9=0	423	13		363		47
	9x+5=4x+9	423	16	280	90	13	24
	-3x-2=3x+5	423	117	161	82	16	47
	x=5+4x	423		284		32	107
	8x-8=-6x+8	423	22	279	79	15	28
	4x=9x	423					423
	-8+x=7	423	9		361		53
	-6x=9	423					423
Anzahl		15552	1813	5895	3472	847	3525

Tabelle 108: Verteilung der Anfangsstrategie je Aufgabe (welche Anfangsstrategie wurde von der Schülerin, von dem Schüler verfolgt)

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-8+x=7	günstige Strategie	Konstante nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	5	
								Anzahl in Prozent	1,1%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	29	
								Anzahl in Prozent	6,6%	
							anderes	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	9,8%	
					Ja	erste Umformung	Konstante nach rechts	Anzahl		268
								Anzahl in Prozent		60,8%
							anderes	Anzahl		96
								Anzahl in Prozent		21,8%
	3x-8=9x+1	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	59	
								Anzahl in Prozent	13,4%	
							x-Term nach links	Anzahl	64	
								Anzahl in Prozent	14,5%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	82	
								Anzahl in Prozent	18,6%	
							Konstante nach links	Anzahl	12	
								Anzahl in Prozent	2,7%	
							anderes	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	5,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		67
								Anzahl in Prozent		15,2%
							x-Term nach links	Anzahl		65
								Anzahl in Prozent		14,7%
							Konstante nach rechts	Anzahl		47
								Anzahl in Prozent		10,7%
							Konstante nach links	Anzahl		18
								Anzahl in Prozent		4,1%
							anderes	Anzahl		1
								Anzahl in Prozent		,2%
	3x+5=-3x-2	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	27	
								Anzahl in Prozent	6,1%	
							x-Term nach links	Anzahl	102	
								Anzahl in Prozent	23,1%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	55	
								Anzahl in Prozent	12,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	29	
								Anzahl in Prozent	6,6%	
							anderes	Anzahl	40	
								Anzahl in Prozent	9,1%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		13
								Anzahl in Prozent		2,9%
							x-Term nach links	Anzahl		133
								Anzahl in Prozent		30,2%
							Konstante nach rechts	Anzahl		19
								Anzahl in Prozent		4,3%
							Konstante nach links	Anzahl		22
								Anzahl in Prozent		5,0%
							anderes	Anzahl		1
								Anzahl in Prozent		,2%
	2x-8=-7x-4	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	23	
								Anzahl in Prozent	5,2%	
							x-Term nach links	Anzahl	96	
								Anzahl in Prozent	21,8%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	55	
								Anzahl in Prozent	12,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	20	
								Anzahl in Prozent	4,5%	

Teiltabellen 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	2x-8=-7x-4	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	anderes	Anzahl	24	
								Anzahl in Prozent	5,4%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		16
								Anzahl in Prozent		3,6%
							x-Term nach links	Anzahl		156
								Anzahl in Prozent		35,4%
							Konstante nach rechts	Anzahl		35
								Anzahl in Prozent		7,9%
							Konstante nach links	Anzahl		14
								Anzahl in Prozent		3,2%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	-7x-7=-8x-5	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	17	
								Anzahl in Prozent	3,9%	
							x-Term nach links	Anzahl	31	
								Anzahl in Prozent	7,0%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	36	
								Anzahl in Prozent	8,2%	
							Konstante nach links	Anzahl	16	
								Anzahl in Prozent	3,6%	
							anderes	Anzahl	31	
								Anzahl in Prozent	7,0%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		17
								Anzahl in Prozent		3,9%
							x-Term nach links	Anzahl		126
								Anzahl in Prozent		28,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		60
								Anzahl in Prozent		13,6%
							Konstante nach links	Anzahl		14
								Anzahl in Prozent		3,2%
							anderes	Anzahl		93
								Anzahl in Prozent		21,1%
	4x+9=9x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	42	
								Anzahl in Prozent	9,5%	
							x-Term nach links	Anzahl	62	
								Anzahl in Prozent	14,1%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	44	
								Anzahl in Prozent	10,0%	
							Konstante nach links	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	5,9%	
							anderes	Anzahl	23	
								Anzahl in Prozent	5,2%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		99
								Anzahl in Prozent		22,4%
							x-Term nach links	Anzahl		89
								Anzahl in Prozent		20,2%
							Konstante nach rechts	Anzahl		23
								Anzahl in Prozent		5,2%
							Konstante nach links	Anzahl		31
								Anzahl in Prozent		7,0%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	-6x+8=8x-8	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	61	
								Anzahl in Prozent	13,8%	
							x-Term nach links	Anzahl	80	
								Anzahl in Prozent	18,1%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	46	
								Anzahl in Prozent	10,4%	

Teiltabellen 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-6x+8=8x-8	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	Konstante nach links	Anzahl	17	
								Anzahl in Prozent	3,9%	
							anderes	Anzahl	32	
								Anzahl in Prozent	7,3%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		87
								Anzahl in Prozent		19,7%
							x-Term nach links	Anzahl		73
								Anzahl in Prozent		16,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		18
								Anzahl in Prozent		4,1%
							Konstante nach links	Anzahl		25
								Anzahl in Prozent		5,7%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	8x+5=6x+7	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	9	
								Anzahl in Prozent	2,0%	
							x-Term nach links	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	9,8%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	39	
								Anzahl in Prozent	8,8%	
							Konstante nach links	Anzahl	9	
								Anzahl in Prozent	2,0%	
							anderes	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	5,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		11
								Anzahl in Prozent		2,5%
							x-Term nach links	Anzahl		224
								Anzahl in Prozent		50,8%
							Konstante nach rechts	Anzahl		70
								Anzahl in Prozent		15,9%
							Konstante nach links	Anzahl		6
								Anzahl in Prozent		1,4%
							anderes	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
	-3x+3=-6x-2	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	29	
								Anzahl in Prozent	6,6%	
							x-Term nach links	Anzahl	113	
								Anzahl in Prozent	25,6%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	42	
								Anzahl in Prozent	9,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	29	
								Anzahl in Prozent	6,6%	
							anderes	Anzahl	25	
								Anzahl in Prozent	5,7%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		30
								Anzahl in Prozent		6,8%
							x-Term nach links	Anzahl		131
								Anzahl in Prozent		29,7%
							Konstante nach rechts	Anzahl		20
								Anzahl in Prozent		4,5%
							Konstante nach links	Anzahl		18
								Anzahl in Prozent		4,1%
							anderes	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
	-7x+4=-6x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	8	
								Anzahl in Prozent	1,8%	
							x-Term nach links	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	9,8%	

Teiltabellen 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-7x+4=-6x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	Konstante nach rechts	Anzahl	44	
								Anzahl in Prozent	10,0%	
							Konstante nach links	Anzahl	8	
								Anzahl in Prozent	1,8%	
							anderes	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	9,8%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		85
								Anzahl in Prozent		19,3%
							x-Term nach links	Anzahl		69
								Anzahl in Prozent		15,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		48
								Anzahl in Prozent		10,9%
							Konstante nach links	Anzahl		7
								Anzahl in Prozent		1,6%
							anderes	Anzahl		86
								Anzahl in Prozent		19,5%
	8x+9=0	günstige Strategie	Konstante nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	11	
								Anzahl in Prozent	2,5%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	175	
								Anzahl in Prozent	39,7%	
							anderes	Anzahl	49	
								Anzahl in Prozent	11,1%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		7
								Anzahl in Prozent		1,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		194
								Anzahl in Prozent		44,0%
							anderes	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,1%
	-9x-6=5x-4	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	59	
								Anzahl in Prozent	13,4%	
							x-Term nach links	Anzahl	80	
								Anzahl in Prozent	18,1%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	50	
								Anzahl in Prozent	11,3%	
							Konstante nach links	Anzahl	24	
								Anzahl in Prozent	5,4%	
							anderes	Anzahl	32	
								Anzahl in Prozent	7,3%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		67
								Anzahl in Prozent		15,2%
							x-Term nach links	Anzahl		84
								Anzahl in Prozent		19,0%
							Konstante nach rechts	Anzahl		40
								Anzahl in Prozent		9,1%
							Konstante nach links	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	-3x+8=-2x-6	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	4	
								Anzahl in Prozent	,9%	
							x-Term nach links	Anzahl	37	
								Anzahl in Prozent	8,4%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	34	
								Anzahl in Prozent	7,7%	
							Konstante nach links	Anzahl	19	
								Anzahl in Prozent	4,3%	
							anderes	Anzahl	53	
								Anzahl in Prozent	12,0%	

Teiltabellen 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-3x+8=-2x-6	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		78
								Anzahl in Prozent		17,7%
							x-Term nach links	Anzahl		71
								Anzahl in Prozent		16,1%
							Konstante nach rechts	Anzahl		27
								Anzahl in Prozent		6,1%
							Konstante nach links	Anzahl		37
								Anzahl in Prozent		8,4%
							anderes	Anzahl		81
								Anzahl in Prozent		18,4%
	3000x+4000=2000x+6000	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	9	
								Anzahl in Prozent	2,0%	
							x-Term nach links	Anzahl	67	
								Anzahl in Prozent	15,2%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	45	
								Anzahl in Prozent	10,2%	
							Konstante nach links	Anzahl	6	
								Anzahl in Prozent	1,4%	
							anderes	Anzahl	51	
								Anzahl in Prozent	11,6%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		9
								Anzahl in Prozent		2,0%
							x-Term nach links	Anzahl		177
								Anzahl in Prozent		40,1%
							Konstante nach rechts	Anzahl		57
								Anzahl in Prozent		12,9%
							Konstante nach links	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
							anderes	Anzahl		16
								Anzahl in Prozent		3,6%
	5x-5=2x-9	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	9	
								Anzahl in Prozent	2,0%	
							x-Term nach links	Anzahl	119	
								Anzahl in Prozent	27,0%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	52	
								Anzahl in Prozent	11,8%	
							Konstante nach links	Anzahl	25	
								Anzahl in Prozent	5,7%	
							anderes	Anzahl	35	
								Anzahl in Prozent	7,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		11
								Anzahl in Prozent		2,5%
							x-Term nach links	Anzahl		137
								Anzahl in Prozent		31,1%
							Konstante nach rechts	Anzahl		31
								Anzahl in Prozent		7,0%
							Konstante nach links	Anzahl		18
								Anzahl in Prozent		4,1%
							anderes	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
	-8x-5=-7x-7	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	15	
								Anzahl in Prozent	3,5%	
							x-Term nach links	Anzahl	52	
								Anzahl in Prozent	12,3%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	36	
								Anzahl in Prozent	8,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	13	
								Anzahl in Prozent	3,1%	

Teiltabellen 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-8x-5=-7x-7	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	anderes	Anzahl	29	
								Anzahl in Prozent	6,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		47
								Anzahl in Prozent		11,1%
							x-Term nach links	Anzahl		109
								Anzahl in Prozent		25,8%
							Konstante nach rechts	Anzahl		38
								Anzahl in Prozent		9,0%
							Konstante nach links	Anzahl		19
								Anzahl in Prozent		4,5%
							anderes	Anzahl		65
								Anzahl in Prozent		15,4%
	-2x-6=-3x+8	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	18	
								Anzahl in Prozent	4,3%	
							x-Term nach links	Anzahl	31	
								Anzahl in Prozent	7,3%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	6,1%	
							Konstante nach links	Anzahl	12	
								Anzahl in Prozent	2,8%	
							anderes	Anzahl	16	
								Anzahl in Prozent	3,8%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		22
								Anzahl in Prozent		5,2%
							x-Term nach links	Anzahl		159
								Anzahl in Prozent		37,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		56
								Anzahl in Prozent		13,2%
							Konstante nach links	Anzahl		6
								Anzahl in Prozent		1,4%
							anderes	Anzahl		77
								Anzahl in Prozent		18,2%
	5x-4=-9x-6	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	25	
								Anzahl in Prozent	5,9%	
							x-Term nach links	Anzahl	138	
								Anzahl in Prozent	32,6%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	46	
								Anzahl in Prozent	10,9%	
							Konstante nach links	Anzahl	15	
								Anzahl in Prozent	3,5%	
							anderes	Anzahl	18	
								Anzahl in Prozent	4,3%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		7
								Anzahl in Prozent		1,7%
							x-Term nach links	Anzahl		140
								Anzahl in Prozent		33,1%
							Konstante nach rechts	Anzahl		22
								Anzahl in Prozent		5,2%
							Konstante nach links	Anzahl		9
								Anzahl in Prozent		2,1%
							anderes	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
	6x+7=8x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	19	
								Anzahl in Prozent	4,5%	
							x-Term nach links	Anzahl	61	
								Anzahl in Prozent	14,4%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	27	
								Anzahl in Prozent	6,4%	

Teiltabellen 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	6x+7=8x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	Konstante nach links	Anzahl	14	
								Anzahl in Prozent	3,3%	
							anderes	Anzahl	13	
								Anzahl in Prozent	3,1%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		109
								Anzahl in Prozent		25,8%
							x-Term nach links	Anzahl		118
								Anzahl in Prozent		27,9%
							Konstante nach rechts	Anzahl		32
								Anzahl in Prozent		7,6%
							Konstante nach links	Anzahl		26
								Anzahl in Prozent		6,1%
							anderes	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
	-7x-4=2x-8	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	10,2%	
							x-Term nach links	Anzahl	97	
								Anzahl in Prozent	22,9%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	41	
								Anzahl in Prozent	9,7%	
							Konstante nach links	Anzahl	17	
								Anzahl in Prozent	4,0%	
							anderes	Anzahl	15	
								Anzahl in Prozent	3,5%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		80
								Anzahl in Prozent		18,9%
							x-Term nach links	Anzahl		84
								Anzahl in Prozent		19,9%
							Konstante nach rechts	Anzahl		24
								Anzahl in Prozent		5,7%
							Konstante nach links	Anzahl		17
								Anzahl in Prozent		4,0%
							anderes	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
	9x+1=3x-8	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	14	
								Anzahl in Prozent	3,3%	
							x-Term nach links	Anzahl	125	
								Anzahl in Prozent	29,6%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	46	
								Anzahl in Prozent	10,9%	
							Konstante nach links	Anzahl	24	
								Anzahl in Prozent	5,7%	
							anderes	Anzahl	16	
								Anzahl in Prozent	3,8%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
							x-Term nach links	Anzahl		151
								Anzahl in Prozent		35,7%
							Konstante nach rechts	Anzahl		24
								Anzahl in Prozent		5,7%
							Konstante nach links	Anzahl		16
								Anzahl in Prozent		3,8%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	-6x-2=-3x+3	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	37	
								Anzahl in Prozent	8,7%	
							x-Term nach links	Anzahl	103	
								Anzahl in Prozent	24,3%	

Teiltabellen 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-6x-2=-3x+3	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	Konstante nach rechts	Anzahl	55	
								Anzahl in Prozent	13,0%	
							Konstante nach links	Anzahl	11	
								Anzahl in Prozent	2,6%	
							anderes	Anzahl	12	
								Anzahl in Prozent	2,8%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		55
								Anzahl in Prozent		13,0%
							x-Term nach links	Anzahl		109
								Anzahl in Prozent		25,8%
							Konstante nach rechts	Anzahl		29
								Anzahl in Prozent		6,9%
							Konstante nach links	Anzahl		9
								Anzahl in Prozent		2,1%
							anderes	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
	3000x+4000=2000x+6000	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	11	
								Anzahl in Prozent	2,6%	
							x-Term nach links	Anzahl	58	
								Anzahl in Prozent	13,7%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	44	
								Anzahl in Prozent	10,4%	
							Konstante nach links	Anzahl	8	
								Anzahl in Prozent	1,9%	
							anderes	Anzahl	24	
								Anzahl in Prozent	5,7%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
							x-Term nach links	Anzahl		210
								Anzahl in Prozent		49,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		43
								Anzahl in Prozent		10,2%
							Konstante nach links	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
							anderes	Anzahl		15
								Anzahl in Prozent		3,5%
	-6x+5=-7x+4	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	14	
								Anzahl in Prozent	3,3%	
							x-Term nach links	Anzahl	41	
								Anzahl in Prozent	9,7%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	20	
								Anzahl in Prozent	4,7%	
							Konstante nach links	Anzahl	17	
								Anzahl in Prozent	4,0%	
							anderes	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	6,1%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		19
								Anzahl in Prozent		4,5%
							x-Term nach links	Anzahl		155
								Anzahl in Prozent		36,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		32
								Anzahl in Prozent		7,6%
							Konstante nach links	Anzahl		24
								Anzahl in Prozent		5,7%
							anderes	Anzahl		75
								Anzahl in Prozent		17,7%
	2x-9=5x-5	günstige Strategie	x-Term nach	Aufgabe richtig	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	49	
								Anzahl in Prozent	11,6%	

Teiltabellen 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	2x-9=5x-5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach links	Anzahl	94	
								Anzahl in Prozent	22,2%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	40	
								Anzahl in Prozent	9,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	18	
								Anzahl in Prozent	4,3%	
							anderes	Anzahl	18	
								Anzahl in Prozent	4,3%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		73
								Anzahl in Prozent		17,3%
							x-Term nach links	Anzahl		89
								Anzahl in Prozent		21,0%
							Konstante nach rechts	Anzahl		31
								Anzahl in Prozent		7,3%
							Konstante nach links	Anzahl		9
								Anzahl in Prozent		2,1%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	8x+9=0	günstige Strategie	Konstante nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	6	
								Anzahl in Prozent	1,4%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	147	
								Anzahl in Prozent	34,8%	
							anderes	Anzahl	42	
								Anzahl in Prozent	9,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		7
								Anzahl in Prozent		1,7%
							Konstante nach rechts	Anzahl		216
								Anzahl in Prozent		51,1%
							anderes	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
	9x+5=4x+9	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	9	
								Anzahl in Prozent	2,1%	
							x-Term nach links	Anzahl	82	
								Anzahl in Prozent	19,4%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	41	
								Anzahl in Prozent	9,7%	
							Konstante nach links	Anzahl	8	
								Anzahl in Prozent	1,9%	
							anderes	Anzahl	21	
								Anzahl in Prozent	5,0%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		7
								Anzahl in Prozent		1,7%
							x-Term nach links	Anzahl		198
								Anzahl in Prozent		46,8%
							Konstante nach rechts	Anzahl		49
								Anzahl in Prozent		11,6%
							Konstante nach links	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
							anderes	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
	-3x-2=3x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	49	
								Anzahl in Prozent	11,6%	
							x-Term nach links	Anzahl	73	
								Anzahl in Prozent	17,3%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	53	
								Anzahl in Prozent	12,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	10	
								Anzahl in Prozent	2,4%	

Teiltabellen 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-3x-2=3x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	anderes	Anzahl	45	
								Anzahl in Prozent	10,6%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		68
								Anzahl in Prozent		16,1%
							x-Term nach links	Anzahl		88
								Anzahl in Prozent		20,8%
							Konstante nach rechts	Anzahl		29
								Anzahl in Prozent		6,9%
							Konstante nach links	Anzahl		6
								Anzahl in Prozent		1,4%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	8x-8=-6x+8	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	14	
								Anzahl in Prozent	3,3%	
							x-Term nach links	Anzahl	105	
								Anzahl in Prozent	24,8%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	10,2%	
							Konstante nach links	Anzahl	12	
								Anzahl in Prozent	2,8%	
							anderes	Anzahl	25	
								Anzahl in Prozent	5,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		8
								Anzahl in Prozent		1,9%
							x-Term nach links	Anzahl		174
								Anzahl in Prozent		41,1%
							Konstante nach rechts	Anzahl		36
								Anzahl in Prozent		8,5%
							Konstante nach links	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
							anderes	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
	-8+x=7	günstige Strategie	Konstante nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	5	
								Anzahl in Prozent	1,2%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	21	
								Anzahl in Prozent	5,0%	
							anderes	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	6,1%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
							Konstante nach rechts	Anzahl		340
								Anzahl in Prozent		80,4%
							anderes	Anzahl		27
								Anzahl in Prozent		6,4%
Gesamt	Anzahl								5509	7451

Teiltabellen 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

		Aufgabe richtig gelöst			
		Nein		Ja	
		Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	3	7,9%	35	92,1%
	-6x=9	11	28,9%	27	71,1%
	3x-8=9x+1	13	34,2%	25	65,8%
	3x+5=-3x-2	16	42,1%	22	57,9%
	2x-8=-7x-4	13	34,2%	25	65,8%
	-7x-7=-8x-5	5	13,2%	33	86,8%
	4x+9=9x+5	10	26,3%	28	73,7%
	-6x+8=8x-8	14	36,8%	24	63,2%
	8x+5=6x+7	7	18,4%	31	81,6%
	-3x+3=-6x-2	15	39,5%	23	60,5%
	-7x+4=-6x+5	1	2,6%	37	97,4%
	8x+9=0	17	44,7%	21	55,3%
	-9x-6=5x-4	14	36,8%	24	63,2%
	x=5+4x	19	50,0%	19	50,0%
	-3x+8=-2x-6	2	5,3%	36	94,7%
	4x=9x	20	52,6%	18	47,4%
	3000x+4000=2000x+6000	10	26,3%	28	73,7%
	5x-5=2x-9	17	44,7%	21	55,3%
Test B	-8x-5=-7x-7	4	16,0%	21	84,0%
	-2x-6=-3x+8	8	32,0%	17	68,0%
	5x-4=-9x-6	13	52,0%	12	48,0%
	6x+7=8x+5	7	28,0%	18	72,0%
	-7x-4=2x-8	12	48,0%	13	52,0%
	9x+1=3x-8	13	52,0%	12	48,0%
	-6x-2=-3x+3	12	48,0%	13	52,0%
	3000x+4000=2000x+6000	7	28,0%	18	72,0%
	-6x+5=-7x+4	7	28,0%	18	72,0%
	2x-9=5x-5	13	52,0%	12	48,0%
	8x+9=0	10	40,0%	15	60,0%
	9x+5=4x+9	12	48,0%	13	52,0%
	-3x-2=3x+5	14	56,0%	11	44,0%
	x=5+4x	16	64,0%	9	36,0%
	8x-8=-6x+8	13	52,0%	12	48,0%
	4x=9x	16	64,0%	9	36,0%
	-8+x=7	3	12,0%	22	88,0%
	-6x=9	14	56,0%	11	44,0%
Gesamt		401	35,4%	733	64,6%

Teiltabellen 110: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die immer die günstige Strategie anwenden (Test A: N = 38; Test B: N = 25) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die günstige Strategie immer anwenden)

		Fehler bei Umformungen			
		Fehler		kein Fehler	
		Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	3	7,9%	35	92,1%
	-6x=9	11	28,9%	27	71,1%
	3x-8=9x+1	12	31,6%	26	68,4%
	3x+5=-3x-2	13	34,2%	25	65,8%
	2x-8=-7x-4	11	28,9%	27	71,1%
	-7x-7=-8x-5	5	13,2%	33	86,8%
	4x+9=9x+5	8	21,1%	30	78,9%
	-6x+8=8x-8	13	34,2%	25	65,8%
	8x+5=6x+7	6	15,8%	32	84,2%
	-3x+3=-6x-2	14	36,8%	24	63,2%
	-7x+4=-6x+5	1	2,6%	37	97,4%
	8x+9=0	15	39,5%	23	60,5%
	-9x-6=5x-4	14	36,8%	24	63,2%
	x=5+4x	18	47,4%	20	52,6%
	-3x+8=-2x-6	2	5,3%	36	94,7%
	4x=9x	13	34,2%	25	65,8%
	3000x+4000=2000x+6000	10	26,3%	28	73,7%
	5x-5=2x-9	15	39,5%	23	60,5%
Test B	-8x-5=-7x-7	4	16,0%	21	84,0%
	-2x-6=-3x+8	8	32,0%	17	68,0%
	5x-4=-9x-6	13	52,0%	12	48,0%
	6x+7=8x+5	6	24,0%	19	76,0%
	-7x-4=2x-8	9	36,0%	16	64,0%
	9x+1=3x-8	12	48,0%	13	52,0%
	-6x-2=-3x+3	11	44,0%	14	56,0%
	3000x+4000=2000x+6000	7	28,0%	18	72,0%
	-6x+5=-7x+4	7	28,0%	18	72,0%
	2x-9=5x-5	10	40,0%	15	60,0%
	8x+9=0	9	36,0%	16	64,0%
	9x+5=4x+9	11	44,0%	14	56,0%
	-3x-2=3x+5	12	48,0%	13	52,0%
	x=5+4x	16	64,0%	9	36,0%
	8x-8=-6x+8	11	44,0%	14	56,0%
	4x=9x	10	40,0%	15	60,0%
	-8+x=7	3	12,0%	22	88,0%
	-6x=9	13	52,0%	12	48,0%
Gesamt		356	31,4%	778	68,6%

Teiltabellen 110: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die immer die günstige Strategie anwenden (Test A: N = 38; Test B: N = 25) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die günstige Strategie immer anwenden)

		Aufgabe richtig gelöst			
		Nein		Ja	
		Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	48	20,2%	190	79,8%
	-6x=9	138	58,0%	100	42,0%
	3x-8=9x+1	140	58,8%	98	41,2%
	3x+5=-3x-2	144	60,5%	94	39,5%
	2x-8=-7x-4	128	53,8%	110	46,2%
	-7x-7=-8x-5	85	35,7%	153	64,3%
	4x+9=9x+5	122	51,3%	116	48,7%
	-6x+8=8x-8	144	60,5%	94	39,5%
	8x+5=6x+7	80	33,6%	158	66,4%
	-3x+3=-6x-2	141	59,2%	97	40,8%
	-7x+4=-6x+5	104	43,7%	134	56,3%
	8x+9=0	138	58,0%	100	42,0%
	-9x-6=5x-4	140	58,8%	98	41,2%
	x=5+4x	157	66,0%	81	34,0%
	-3x+8=-2x-6	105	44,1%	133	55,9%
	4x=9x	157	66,0%	81	34,0%
	3000x+4000=2000x+6000	111	46,6%	127	53,4%
	5x-5=2x-9	138	58,0%	100	42,0%
Test B	-8x-5=-7x-7	101	39,3%	156	60,7%
	-2x-6=-3x+8	73	28,4%	184	71,6%
	5x-4=-9x-6	156	60,7%	101	39,3%
	6x+7=8x+5	103	40,1%	154	59,9%
	-7x-4=2x-8	150	58,4%	107	41,6%
	9x+1=3x-8	144	56,0%	113	44,0%
	-6x-2=-3x+3	142	55,3%	115	44,7%
	3000x+4000=2000x+6000	104	40,5%	153	59,5%
	-6x+5=-7x+4	87	33,9%	170	66,1%
	2x-9=5x-5	146	56,8%	111	43,2%
	8x+9=0	131	51,0%	126	49,0%
	9x+5=4x+9	109	42,4%	148	57,6%
	-3x-2=3x+5	153	59,5%	104	40,5%
	x=5+4x	155	60,3%	102	39,7%
	8x-8=-6x+8	138	53,7%	119	46,3%
	4x=9x	170	66,1%	87	33,9%
	-8+x=7	36	14,0%	221	86,0%
	-6x=9	135	52,5%	122	47,5%
Gesamt		4453	50,0%	4457	50,0%

Teiltabellen 111: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die niemals die günstige Strategie anwenden (Test A: N = 238; Test B: N = 257) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die günstige Strategie niemals anwenden)

				Fehler bei Umformungen			
				Fehler		kein Fehler	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
	Test A		-8+x=7	47	19,7%	191	80,3%
			-6x=9	135	56,7%	103	43,3%
			3x-8=9x+1	131	55,0%	107	45,0%
			3x+5=-3x-2	133	55,9%	105	44,1%
			2x-8=-7x-4	114	47,9%	124	52,1%
			-7x-7=-8x-5	80	33,6%	158	66,4%
			4x+9=9x+5	113	47,5%	125	52,5%
			-6x+8=8x-8	132	55,5%	106	44,5%
			8x+5=6x+7	74	31,1%	164	68,9%
			-3x+3=-6x-2	129	54,2%	109	45,8%
			-7x+4=-6x+5	100	42,0%	138	58,0%
			8x+9=0	128	53,8%	110	46,2%
			-9x-6=5x-4	129	54,2%	109	45,8%
			x=5+4x	151	63,4%	87	36,6%
			-3x+8=-2x-6	99	41,6%	139	58,4%
			4x=9x	119	50,0%	119	50,0%
			3000x+4000=2000x+6000	108	45,4%	130	54,6%
			5x-5=2x-9	127	53,4%	111	46,6%
	Test B		-8x-5=-7x-7	98	38,1%	159	61,9%
			-2x-6=-3x+8	66	25,7%	191	74,3%
			5x-4=-9x-6	139	54,1%	118	45,9%
			6x+7=8x+5	95	37,0%	162	63,0%
			-7x-4=2x-8	137	53,3%	120	46,7%
			9x+1=3x-8	136	52,9%	121	47,1%
			-6x-2=-3x+3	132	51,4%	125	48,6%
			3000x+4000=2000x+6000	97	37,7%	160	62,3%
			-6x+5=-7x+4	85	33,1%	172	66,9%
			2x-9=5x-5	132	51,4%	125	48,6%
			8x+9=0	120	46,7%	137	53,3%
			9x+5=4x+9	99	38,5%	158	61,5%
			-3x-2=3x+5	143	55,6%	114	44,4%
			x=5+4x	144	56,0%	113	44,0%
			8x-8=-6x+8	116	45,1%	141	54,9%
			4x=9x	122	47,5%	135	52,5%
			-8+x=7	36	14,0%	221	86,0%
			-6x=9	131	51,0%	126	49,0%
Gesamt				4077	45,8%	4833	54,2%

Teiltabellen 111: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die niemals die günstige Strategie anwenden (Test A: N = 238; Test B: N = 257) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die günstige Strategie niemals anwenden)

		Aufgabe richtig gelöst			
		Nein		Ja	
		Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	12	24,5%	37	75,5%
	-6x=9	28	57,1%	21	42,9%
	3x-8=9x+1	29	59,2%	20	40,8%
	3x+5=-3x-2	32	65,3%	17	34,7%
	2x-8=-7x-4	23	46,9%	26	53,1%
	-7x-7=-8x-5	16	32,7%	33	67,3%
	4x+9=9x+5	25	51,0%	24	49,0%
	-6x+8=8x-8	31	63,3%	18	36,7%
	8x+5=6x+7	15	30,6%	34	69,4%
	-3x+3=-6x-2	33	67,3%	16	32,7%
	-7x+4=-6x+5	15	30,6%	34	69,4%
	8x+9=0	26	53,1%	23	46,9%
	-9x-6=5x-4	33	67,3%	16	32,7%
	x=5+4x	33	67,3%	16	32,7%
	-3x+8=-2x-6	16	32,7%	33	67,3%
	4x=9x	30	61,2%	19	38,8%
	3000x+4000=2000x+6000	22	44,9%	27	55,1%
	5x-5=2x-9	30	61,2%	19	38,8%
Test B	-8x-5=-7x-7	30	32,6%	62	67,4%
	-2x-6=-3x+8	20	21,7%	72	78,3%
	5x-4=-9x-6	56	60,9%	36	39,1%
	6x+7=8x+5	33	35,9%	59	64,1%
	-7x-4=2x-8	56	60,9%	36	39,1%
	9x+1=3x-8	50	54,3%	42	45,7%
	-6x-2=-3x+3	52	56,5%	40	43,5%
	3000x+4000=2000x+6000	28	30,4%	64	69,6%
	-6x+5=-7x+4	22	23,9%	70	76,1%
	2x-9=5x-5	52	56,5%	40	43,5%
	8x+9=0	49	53,3%	43	46,7%
	9x+5=4x+9	32	34,8%	60	65,2%
	-3x-2=3x+5	47	51,1%	45	48,9%
	x=5+4x	56	60,9%	36	39,1%
	8x-8=-6x+8	48	52,2%	44	47,8%
	4x=9x	57	62,0%	35	38,0%
	-8+x=7	10	10,9%	82	89,1%
	-6x=9	46	50,0%	46	50,0%
Gesamt		1193	47,0%	1345	53,0%

Teiltabellen 112: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die immer die Standardstrategie ("x-Term nach links") anwenden (Test A: N = 49; Test B: N = 92) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die Standardstrategie immer anwenden)

		Fehler bei Umformungen			
		Fehler		kein Fehler	
		Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	11	22,4%	38	77,6%
	-6x=9	26	53,1%	23	46,9%
	3x-8=9x+1	28	57,1%	21	42,9%
	3x+5=-3x-2	29	59,2%	20	40,8%
	2x-8=-7x-4	22	44,9%	27	55,1%
	-7x-7=-8x-5	15	30,6%	34	69,4%
	4x+9=9x+5	23	46,9%	26	53,1%
	-6x+8=8x-8	28	57,1%	21	42,9%
	8x+5=6x+7	13	26,5%	36	73,5%
	-3x+3=-6x-2	31	63,3%	18	36,7%
	-7x+4=-6x+5	14	28,6%	35	71,4%
	8x+9=0	23	46,9%	26	53,1%
	-9x-6=5x-4	31	63,3%	18	36,7%
	x=5+4x	32	65,3%	17	34,7%
	-3x+8=-2x-6	15	30,6%	34	69,4%
	4x=9x	25	51,0%	24	49,0%
	3000x+4000=2000x+6000	20	40,8%	29	59,2%
	5x-5=2x-9	29	59,2%	20	40,8%
Test B	-8x-5=-7x-7	30	32,6%	62	67,4%
	-2x-6=-3x+8	20	21,7%	72	78,3%
	5x-4=-9x-6	52	56,5%	40	43,5%
	6x+7=8x+5	32	34,8%	60	65,2%
	-7x-4=2x-8	53	57,6%	39	42,4%
	9x+1=3x-8	50	54,3%	42	45,7%
	-6x-2=-3x+3	50	54,3%	42	45,7%
	3000x+4000=2000x+6000	27	29,3%	65	70,7%
	-6x+5=-7x+4	22	23,9%	70	76,1%
	2x-9=5x-5	48	52,2%	44	47,8%
	8x+9=0	46	50,0%	46	50,0%
	9x+5=4x+9	31	33,7%	61	66,3%
	-3x-2=3x+5	44	47,8%	48	52,2%
	x=5+4x	53	57,6%	39	42,4%
	8x-8=-6x+8	42	45,7%	50	54,3%
	4x=9x	42	45,7%	50	54,3%
	-8+x=7	10	10,9%	82	89,1%
	-6x=9	44	47,8%	48	52,2%
Gesamt		1111	43,8%	1427	56,2%

Teiltabellen 112: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die immer die Standardstrategie ("x-Term nach links") anwenden (Test A: N = 49; Test B: N = 92) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die Standardstrategie immer anwenden)

				Aufgabe richtig gelöst			
				Nein		Ja	
				Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
	Test A		-8+x=7	34	16,5%	172	83,5%
			-6x=9	118	57,3%	88	42,7%
			3x-8=9x+1	118	57,3%	88	42,7%
			3x+5=-3x-2	131	63,6%	75	36,4%
			2x-8=-7x-4	116	56,3%	90	43,7%
			-7x-7=-8x-5	78	37,9%	128	62,1%
			4x+9=9x+5	106	51,5%	100	48,5%
			-6x+8=8x-8	114	55,3%	92	44,7%
			8x+5=6x+7	72	35,0%	134	65,0%
			-3x+3=-6x-2	122	59,2%	84	40,8%
			-7x+4=-6x+5	74	35,9%	132	64,1%
			8x+9=0	119	57,8%	87	42,2%
			-9x-6=5x-4	124	60,2%	82	39,8%
			x=5+4x	134	65,0%	72	35,0%
			-3x+8=-2x-6	74	35,9%	132	64,1%
			4x=9x	141	68,4%	65	31,6%
			3000x+4000=2000x+6000	85	41,3%	121	58,7%
			5x-5=2x-9	123	59,7%	83	40,3%
	Test B		-8x-5=-7x-7	60	38,7%	95	61,3%
			-2x-6=-3x+8	57	36,8%	98	63,2%
			5x-4=-9x-6	94	60,6%	61	39,4%
			6x+7=8x+5	55	35,5%	100	64,5%
			-7x-4=2x-8	76	49,0%	79	51,0%
			9x+1=3x-8	91	58,7%	64	41,3%
			-6x-2=-3x+3	84	54,2%	71	45,8%
			3000x+4000=2000x+6000	71	45,8%	84	54,2%
			-6x+5=-7x+4	56	36,1%	99	63,9%
			2x-9=5x-5	89	57,4%	66	42,6%
			8x+9=0	82	52,9%	73	47,1%
			9x+5=4x+9	71	45,8%	84	54,2%
			-3x-2=3x+5	95	61,3%	60	38,7%
			x=5+4x	94	60,6%	61	39,4%
			8x-8=-6x+8	89	57,4%	66	42,6%
			4x=9x	113	72,9%	42	27,1%
			-8+x=7	25	16,1%	130	83,9%
			-6x=9	87	56,1%	68	43,9%
Gesamt				3272	50,4%	3226	49,6%

Teiltabellen 113: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die niemals die Standardstrategie ("x-Term nach links") anwenden (Test A: N = 196; Test B: N = 155) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die Standardstrategie niemals anwenden)

		Fehler bei Umformungen			
		Fehler		kein Fehler	
		Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	34	16,5%	172	83,5%
	-6x=9	117	56,8%	89	43,2%
	3x-8=9x+1	102	49,5%	104	50,5%
	3x+5=-3x-2	118	57,3%	88	42,7%
	2x-8=-7x-4	104	50,5%	102	49,5%
	-7x-7=-8x-5	74	35,9%	132	64,1%
	4x+9=9x+5	94	45,6%	112	54,4%
	-6x+8=8x-8	99	48,1%	107	51,9%
	8x+5=6x+7	68	33,0%	138	67,0%
	-3x+3=-6x-2	107	51,9%	99	48,1%
	-7x+4=-6x+5	71	34,5%	135	65,5%
	8x+9=0	110	53,4%	96	46,6%
	-9x-6=5x-4	116	56,3%	90	43,7%
	x=5+4x	128	62,1%	78	37,9%
	-3x+8=-2x-6	70	34,0%	136	66,0%
	4x=9x	107	51,9%	99	48,1%
	3000x+4000=2000x+6000	82	39,8%	124	60,2%
	5x-5=2x-9	109	52,9%	97	47,1%
Test B	-8x-5=-7x-7	58	37,4%	97	62,6%
	-2x-6=-3x+8	51	32,9%	104	67,1%
	5x-4=-9x-6	82	52,9%	73	47,1%
	6x+7=8x+5	48	31,0%	107	69,0%
	-7x-4=2x-8	66	42,6%	89	57,4%
	9x+1=3x-8	83	53,5%	72	46,5%
	-6x-2=-3x+3	75	48,4%	80	51,6%
	3000x+4000=2000x+6000	66	42,6%	89	57,4%
	-6x+5=-7x+4	55	35,5%	100	64,5%
	2x-9=5x-5	77	49,7%	78	50,3%
	8x+9=0	73	47,1%	82	52,9%
	9x+5=4x+9	60	38,7%	95	61,3%
	-3x-2=3x+5	88	56,8%	67	43,2%
	x=5+4x	87	56,1%	68	43,9%
	8x-8=-6x+8	73	47,1%	82	52,9%
	4x=9x	74	47,7%	81	52,3%
	-8+x=7	25	16,1%	130	83,9%
	-6x=9	84	54,2%	71	45,8%
Gesamt		2935	45,2%	3563	54,8%

Teiltabellen 113: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die niemals die Standardstrategie ("x-Term nach links") anwenden (Test A: N = 196; Test B: N = 155) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die Standardstrategie niemals anwenden)

Strategie			Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
			Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
			Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Standard	Klasse	44	61	56,5%	47	43,5%	59	54,6%	49	45,4%
		45	24	44,4%	30	55,6%	24	44,4%	30	55,6%
		46	14	19,4%	58	80,6%	14	19,4%	58	80,6%
		47	6	16,7%	30	83,3%	6	16,7%	30	83,3%
		48	32	35,6%	58	64,4%	30	33,3%	60	66,7%
		49	12	22,2%	42	77,8%	10	18,5%	44	81,5%
		50	20	37,0%	34	63,0%	19	35,2%	35	64,8%
		51	14	38,9%	22	61,1%	12	33,3%	24	66,7%
		52	10	13,9%	62	86,1%	10	13,9%	62	86,1%
		53	12	22,2%	42	77,8%	10	18,5%	44	81,5%
		54	23	31,9%	49	68,1%	21	29,2%	51	70,8%
		55	18	50,0%	18	50,0%	18	50,0%	18	50,0%
		56	24	44,4%	30	55,6%	24	44,4%	30	55,6%
		57	19	52,8%	17	47,2%	15	41,7%	21	58,3%
		59	22	30,6%	50	69,4%	22	30,6%	50	69,4%
		60	22	30,6%	50	69,4%	21	29,2%	51	70,8%
		61	35	27,8%	91	72,2%	31	24,6%	95	75,4%
		62	32	35,6%	58	64,4%	18	20,0%	72	80,0%
		63	21	58,3%	15	41,7%	20	55,6%	16	44,4%
		64	6	33,3%	12	66,7%	6	33,3%	12	66,7%
		65	38	35,2%	70	64,8%	36	33,3%	72	66,7%
		66	36	50,0%	36	50,0%	36	50,0%	36	50,0%
		67	48	66,7%	24	33,3%	47	65,3%	25	34,7%
		68	44	48,9%	46	51,1%	43	47,8%	47	52,2%
		69	27	75,0%	9	25,0%	21	58,3%	15	41,7%
		70	53	58,9%	37	41,1%	53	58,9%	37	41,1%
		71	9	16,7%	45	83,3%	9	16,7%	45	83,3%
		72	14	77,8%	4	22,2%	13	72,2%	5	27,8%
		73	36	66,7%	18	33,3%	36	66,7%	18	33,3%
		78	45	83,3%	9	16,7%	44	81,5%	10	18,5%
		80	82	65,1%	44	34,9%	78	61,9%	48	38,1%
		81	11	20,4%	43	79,6%	10	18,5%	44	81,5%
		82	22	61,1%	14	38,9%	22	61,1%	14	38,9%
		84	16	88,9%	2	11,1%	16	88,9%	2	11,1%
		86	1	5,6%	17	94,4%	1	5,6%	17	94,4%
		88	46	85,2%	8	14,8%	45	83,3%	9	16,7%
		89	36	66,7%	18	33,3%	36	66,7%	18	33,3%
		90			18	100,0%			18	100,0%
		91	18	100,0%			18	100,0%		
		95	12	66,7%	6	33,3%	7	38,9%	11	61,1%
		96	94	87,0%	14	13,0%	89	82,4%	19	17,6%
		97	17	94,4%	1	5,6%	16	88,9%	2	11,1%
		98	15	27,8%	39	72,2%	14	25,9%	40	74,1%
		99	46	85,2%	8	14,8%	31	57,4%	23	42,6%
	Gesamt		1193	47,0%	1345	53,0%	1111	43,8%	1427	56,2%

Teiltabellen 114: Lösungserfolg auf Klassenebene der Schülerinnen und Schüler, (gruppiert nach Standardstrategie und günstige Strategie)

Strategie			Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
			Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
			Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
günstige Strategie	Klasse	44	9	25,0%	27	75,0%	6	16,7%	30	83,3%
		45	36	50,0%	36	50,0%	36	50,0%	36	50,0%
		46	6	33,3%	12	66,7%	6	33,3%	12	66,7%
		49	6	33,3%	12	66,7%	6	33,3%	12	66,7%
		50	24	44,4%	30	55,6%	19	35,2%	35	64,8%
		51	18	50,0%	18	50,0%	10	27,8%	26	72,2%
		52	5	13,9%	31	86,1%	5	13,9%	31	86,1%
		53	3	16,7%	15	83,3%	3	16,7%	15	83,3%
		54	13	36,1%	23	63,9%	13	36,1%	23	63,9%
		55	33	45,8%	39	54,2%	31	43,1%	41	56,9%
		56	32	29,6%	76	70,4%	29	26,9%	79	73,1%
		59	3	16,7%	15	83,3%	3	16,7%	15	83,3%
		60	5	13,9%	31	86,1%	5	13,9%	31	86,1%
		61			18	100,0%			18	100,0%
		62	10	18,5%	44	81,5%	9	16,7%	45	83,3%
		63	6	33,3%	12	66,7%	5	27,8%	13	72,2%
		64	7	19,4%	29	80,6%	7	19,4%	29	80,6%
		68	14	38,9%	22	61,1%	13	36,1%	23	63,9%
		69	8	22,2%	28	77,8%	8	22,2%	28	77,8%
		70	5	27,8%	13	72,2%	5	27,8%	13	72,2%
		71	7	38,9%	11	61,1%	7	38,9%	11	61,1%
		78	2	11,1%	16	88,9%	1	5,6%	17	94,4%
		82	48	88,9%	6	11,1%	40	74,1%	14	25,9%
		86	1	2,8%	35	97,2%	1	2,8%	35	97,2%
		98	13	72,2%	5	27,8%	5	27,8%	13	72,2%
		58	15	20,8%	57	79,2%	14	19,4%	58	80,6%
		76	9	50,0%	9	50,0%	8	44,4%	10	55,6%
		77	18	100,0%			18	100,0%		
		83	2	11,1%	16	88,9%	2	11,1%	16	88,9%
		92	20	37,0%	34	63,0%	20	37,0%	34	63,0%
		93	13	72,2%	5	27,8%	13	72,2%	5	27,8%
		94	10	55,6%	8	44,4%	8	44,4%	10	55,6%
	Gesamt		401	35,4%	733	64,6%	356	31,4%	778	68,6%

Teiltabellen 114: Lösungserfolg auf Klassenebene der Schülerinnen und Schüler, (gruppiert nach Standardstrategie und günstige Strategie)

Gruppenstatistiken

Klassen		N	Mittelwert	Standard-abweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Aufgabe richtig gelöst	mit mehr als 50 % Standardstrategie	3348	,5463	,4979	8,605E-03
	mit mehr als 50 % günstige Strategie	1080	,6019	,4897	1,490E-02

		Levene-Test der Varianzgleichheit		T-Test für die Mittelwertgleichheit						
		F	Signifikanz	T	df	Sig. (2-seitig)	Mittlere Differenz	Standardfehler der Differenz	95% Konfidenzintervall der Differenz	
									Untere	Obere
Aufgabe richtig gelöst	Varianzen sind gleich	54,853	,000	-3,201	4426	,001	-5,5556E-02	1,736E-02	-8,9581E-02	-2,1531E-02
	Varianzen sind nicht gleich			-3,228	1852,170	,001	-5,5556E-02	1,721E-02	-8,9306E-02	-2,1805E-02

Gruppenstatistiken

Klassen		N	Mittelwert	Standard-abweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Aufgabe richtig gelöst	mit mehr als 50 % Standardstrategie	3348	,5463	,4979	8,605E-03
	ohne ausgeprägte Strategie	11124	,5455	,4979	4,721E-03

		Levene-Test der Varianzgleichheit		T-Test für die Mittelwertgleichheit						
		F	Signifikanz	T	df	Sig. (2-seitig)	Mittlere Differenz	Standardfehler der Differenz	95% Konfidenzintervall der Differenz: Untere	Obere
Aufgabe richtig gelöst	Varianzen sind gleich	,027	,868	,082	14470	,934	8,091E-04	9,816E-03	-1,8431E-02	2,005E-02
	Varianzen sind nicht gleich			,082	5514,775	,934	8,091E-04	9,815E-03	-1,8433E-02	2,005E-02

Gruppenstatistiken

Klassen		N	Mittelwert	Standard-abweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Aufgabe richtig gelöst	mit mehr als 50 % günstige Strategie	1080	,6019	,4897	1,490E-02
	ohne ausgeprägte Strategie	11124	,5455	,4979	4,721E-03

		Levene-Test der Varianzgleichheit		T-Test für die Mittelwertgleichheit						
		F	Signifikanz	T	df	Sig. (2-seitig)	Mittlere Differenz	Standardfehler der Differenz	95% Konfidenzintervall der Differenz: Untere	Obere
Aufgabe richtig gelöst	Varianzen sind gleich	98,727	,000	3,557	12202	,000	5,636E-02	1,585E-02	2,530E-02	8,743E-02
	Varianzen sind nicht gleich			3,606	1305,189	,000	5,636E-02	1,563E-02	2,570E-02	8,703E-02

Tabelle 115: T-Test bei unabhängigen Stichproben: Lösungserfolg auf Klassenebene
(Gruppierung der Klassen: mehr als 50-prozentiger Anteil Standardstrategie N1 = 186, mehr als 50-prozentiger Anteil günstige Strategie N2 = 60, ohne ausgeprägte Strategie N3 = 618)

			Schülergruppen				Gesamt
			immer günstig	immer Standard	teils/teils	niemals günstig, niemals Standard	
Aufgabe richtig gelöst	Nein	Anzahl	401	1193	3393	2018	7005
		% der Gesamtzahl	2,6%	7,7%	21,8%	13,0%	45,0%
	Ja	Anzahl	733	1345	5175	1294	8547
		% der Gesamtzahl	4,7%	8,6%	33,3%	8,3%	55,0%
Gesamt[a]		Anzahl	1134	2538	8568	3312	15552
		% der Gesamtzahl	7,3%	16,3%	55,1%	21,3%	100,0%

a. chi-quadrat = 487 df = 3

Tabelle 116: Kreuztabelle: Schülergruppen - Lösungserfolg
(Gruppierung der Schüler aufgrund der "trennenden" Aufgaben)

		Häufigkeit	Prozent
	-6x=9	1001	4,1
	-8+x=7	857	3,5
	3000x+4000=2000x+6000	834	3,4
	8x+9=0	827	3,4
	x=5+4x	813	3,4
	4x=9x	686	2,8
	8x=-9	622	2,6
	-3x=5	593	2,4
	1000x=2000	589	2,4
	3x-8=9x+1	440	1,8
	2x-8=-7x-4	431	1,8
	-6x+8=8x-8	431	1,8
	3x+5=-3x-2	430	1,8
	4x+9=9x+5	430	1,8
	-7x-7=-8x-5	429	1,8
	8x+5=6x+7	429	1,8
	-3x+3=-6x-2	426	1,8
	-9x-6=5x-4	425	1,8
	-3x+8=-2x-6	423	1,7
	-8x-5=-7x-7	422	1,7
	-2x-6=-3x+8	422	1,7
	6x+7=8x+5	422	1,7
	-7x-4=2x-8	422	1,7
	-6x-2=-3x+3	421	1,7
	-7x+4=-6x+5	421	1,7
	5x-4=-9x-6	420	1,7
	9x+1=3x-8	419	1,7
	-6x+5=-7x+4	418	1,7
	2x-9=5x-5	416	1,7
	5x-5=2x-9	416	1,7
	8x-8=-6x+8	415	1,7
	9x+5=4x+9	412	1,7
	-3x-2=3x+5	410	1,7
	2x=2	340	1,4
	5x=4	309	1,3
	6x=-9	309	1,3
	14x=16	295	1,2

Teiltabellen 117: absolute Häufigkeiten der Gleichungen (nur unter Beachtung von Gleichungen, z. B. -6x = 9, die im Test A oder Test B mehr als 100mal auftreten)

		Häufigkeit	Prozent
	3x=-5	286	1,2
	14x=-2	284	1,2
	6x=-7	280	1,2
	1000x+4000=6000	280	1,2
	9x=4	276	1,1
	3x=-4	274	1,1
	-5x=-4	181	,7
	-2x=-2	180	,7
	-14x=2	180	,7
	-5=3x	172	,7
	-5x=0	163	,7
	4=5x	163	,7
	16=14x	161	,7
	3000x=2000x+2000	158	,7
	-3x=4	157	,6
	-6x=7	156	,6
	-9x=-4	154	,6
	2=2x	149	,6
	0=5x	147	,6
	14x-4=-6	144	,6
	6x+1=-8	144	,6
	4=9x	138	,6
	-14x=-16	134	,6
	x=-9/6	134	,6
	9x-8=-4	133	,5
	6x+5=-2	126	,5
	-2=14x	125	,5
	3x-5=-9	124	,5
	5x+5=9	122	,5
	-4=3x	120	,5
	3x+3=-2	116	,5
	-9=6x	115	,5
	2x+5=7	113	,5
	14x-8=8	109	,4
	-7=6x	105	,4
	-1x=-2	104	,4
	3x=9x+9	102	,4
	Gesamt	24234	100,0

Teiltabellen 117: absolute Häufigkeiten der Gleichungen (nur unter Beachtung von Gleichungen, z. B. -6x = 9, die im Test A oder Test B mehr als 100mal auftreten)

		Häufigkeit	Prozent
Gleichungsform	Ax+B=Cx+D	10980	45,3
	Ax=D	6600	27,2
	Ax+B=D	2268	9,4
	B=Cx	1248	5,1
	Ax+B=0	827	3,4
	x=Cx+D	813	3,4
	Ax=Cx	684	2,8
	Ax=Cx+D	260	1,1
	x=D	242	1,0
	Ax=0	163	,7
	0=Cx	147	,6
	Gesamt	24234	100,0

Tabelle 118: absolute Häufigkeiten der Gleichungsformen (nur unter Beachtung von Gleichungen, die im Test A oder Test B mehr als 100mal auftreten)

		falsche Umformung
		Mittelwert
Gleichungsform	x=D+Cx	,33
	Ax=D	,27
	B=Cx	,21
	Ax=Cx	,17
	x=D	,16
	Ax=0	,16
	Ax+B=0	,15
	Ax=Cx+D	,13
	Ax+B=Cx+D	,13
	Ax+B=D	,09
	0=Cx	,08
Gesamt		,18

Tabelle 119: Anteil der Fehlerquote bei den entsprechenden Gleichungsformen (nur unter Beachtung von Gleichungen, die im Test A oder Test B mehr als 100mal auftreten)

		falsche Umformung
		Mittelwert
Gleichung	-6x=9	,40
	14x=-2	,36
	-2=14x	,35
	-14x=2	,34
	x=5+4x	,33
	6x=-7	,32
	3x=-5	,31
	8x=-9	,30
	3x=-4	,29
	-5x=-4	,27
	-14x=-16	,26
	-3x=5	,25
	6x=-9	,25
	-9x=-4	,25
	-3x=4	,24
	-4=3x	,24
	-7=6x	,24
	-5=3x	,23
	9x=4	,22
	4=9x	,22
	3x=9x+9	,21
	-1x=-2	,20
	-9=6x	,20
	5x=4	,19
	-6x=7	,19
	1000x=2000	,19
	4=5x	,18
	-2x=-2	,18
	16=14x	,17
	4x=9x	,17
	14x=16	,17
	3x-8=9x+1	,16
	-3x-2=3x+5	,16
	3x+5=-3x-2	,16
	9x+1=3x-8	,16
	-5x=0	,16
	-6x+8=8x-8	,16
	-8x-5=-7x-7	,15

Teiltabellen 120: Anteil der Fehlerquote bei den entsprechenden Gleichungen (nur unter Beachtung von Gleichungen, die im Test mehr als 100mal auftreten)

		falsche Umformung
		Mittelwert
Gleichung	5x-4=-9x-6	,15
	8x+9=0	,15
	3x-5=-9	,15
	-7x-4=2x-8	,14
	-6x-2=-3x+3	,13
	-3x+8=-2x-6	,13
	5x-5=2x-9	,13
	2x-9=5x-5	,13
	-6x+5=-7x+4	,13
	-2x-6=-3x+8	,13
	6x+1=-8	,13
	-3x+3=-6x-2	,12
	-7x-7=-8x-5	,12
	2x-8=-7x-4	,12
	-9x-6=5x-4	,12
	-8+x=7	,12
	-7x+4=-6x+5	,12
	8x-8=-6x+8	,12
	3x+3=-2	,11
	4x+9=9x+5	,11
	9x+5=4x+9	,11
	3000x+4000=2000x+6000	,11
	6x+7=8x+5	,11
	x=-9/6	,10
	2x=2	,10
	14x-4=-6	,09
	3000x=2000x+2000	,09
	6x+5=-2	,09
	9x-8=-4	,08
	14x-8=8	,08
	0=5x	,08
	8x+5=6x+7	,08
	2=2x	,07
	5x+5=9	,04
	1000x+4000=6000	,03
	2x+5=7	,01
Gesamt		,18

Teiltabellen 120: Anteil der Fehlerquote bei den entsprechenden Gleichungen (nur unter Beachtung von Gleichungen, die im Test mehr als 100mal auftreten)

			richtige Umformung	falsche Umformung	Gesamt
Zeilentext	-6x=9	Anzahl	599	402	1001
		% der Gesamtzahl	45,7%	30,7%	76,4%
	6x=-9	Anzahl	231	78	309
		% der Gesamtzahl	17,6%	6,0%	23,6%
Gesamt[a]		Anzahl	830	480	1310
		% der Gesamtzahl	63,4%	36,6%	100,0%

a. chi-quadrat = 22,6 df = 1

Tabelle 121: Kreuztabelle: -6x=9 und 6x=-9 / Umformungserfolg

			Fehlerart			
	falsch	erkannte Fehler	Vorzeichen falsch	Vertauschung von Multiplikation und Division	Kehrwert gebildet	Vertauschung von Addition und Division
-6x=9 | +6 => x=15	83	83				83
-6x=9 | +6 => x=9+6	24	24				24
-6x=9 | :6 => x=1,5	10	10	10			
-6x=9 | :(+6) => x=1,5	2	2	2			
-6x=9 | +6x => x=9	5	5				
-6x=9 | :(-6) => x=1,5	27	27	27			
-6x=9 | -6 => x=9-6	3	3				3
-6x=9 | +6x => x=15	2	2				2
-6x=9 | *6 => x=54	2	2	2	2		
-6x=9 | :-6 => x=-6/9	3	3			3	
-6x=9 | :(-6) => x=-2/3	1	1			1	
-6x=9 | :-6x => x=9/6	1	1	1			
-6x=9 | :-6 => x=9	1	1				
-6x=9 | :6 => x=3/2	5	5	5			
-6x=9 | *(-1) => 6x=-4	1					
-6x=9 => -6*(-1,5)=9	2	2				
-6x=9 | :9 => -x=6/9	1	1			1	
-6x=9 | *6 => x=+54	1	1	1	1		
-6x=9 => x=-1,p33	1					
-6x=9 => -6*-1,5=9	2	2				
-6x=9 | -9 => -15x=0	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=-6/9	7	7			7	
-6x=9 | :-6 => x=-1/2	1					
-6x=9 | *(-6) => x=-54	4	4		4		
-6x=9 | :(-6) => x=-54	1	1		1		
-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=3/2=1b1/2	1	1	1			
-6x=9 => x=-2/3	3					
-6x=9 => -1,5=9	1	1				
-6x=9 => x=9/6=3/2	1	1	1			
-6x=9 => x=9/6	2	2	2			
-6x=9 => x=15	4	4				4
-6x=9 | :6 => x=1,_	2	2				
-6x=9 | +6x => 0=15x	1					
-6x=9 | :(-6) => x=9/6	5	5	5			
-6x=9 | +6x => =6x+9	1	1				
-6x=9 | :-6 => x=1,5	6	6	6			
-6x=9 | :-6x => x=1,5	5	5	5			
-6x=9 | :-6 => x=9/6=1b3/6=1b1/2	1	1	1			
-6x=9 | :(-6) => x=9/6=1b3/6=1b1/2	2	2	2			
-6x=9 | :-6 => x=-0,5	2					
-6x=9 | *(-1/6) => x=1,5	1	1	1			
-6x=9 | :(-6) => x=-1b1/3	1					
-6x=9 | :(-6) => x=3/2	3	3	3			

Teiltabellen 122a: Fehlerklassifikation bei Umformungen von -6x=9

		erkannte Fehler	Fehlerart			
	falsch		Vor-zeichen falsch	Vertau-schung von Multi-plika-tion und Division	Kehr-wert gebildet	Vertau-schung von Addition und Division
-6x=9 | :(-6) => x=-3	3	3	3			3
-6x=9 | :-6 => x=3/2	1	1	1			
-6x=9 | :6 => x=9/6=1b1/2	1	1	1			
-6x=9 | :x => -6=9x	1					
-6x=9 | :-6x => 1=-9-6x	1					
-6x=9 | :-6 => x=9/6	2	2	2			
-6x=9 | :(-6) => x=-1,_	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=1,6	2	2	2			
-6x=9 | *(-1/6) => x=3/2	1	1	1			
-6x=9 | :(-6) => x=-9/3	1	1	1			1
-6x=9 | *(-1/6) => x=9/6=3/2	1	1	1			
-6x=9 | :6 => -x=1/2	1					
-6x=9 | *(-1/6) => x=9/6	1	1	1			
-6x=9 | :(-6) => x=1b1/2	2	2	2			
-6x=9 | -6 => x=3	5	5				5
-6x=9 | +6x => 9+6x	1	1				
-6x=9 | :-6 => -3/2=-9/6=x	1					
-6x=9 | :(-6) => x=9/6=3/2	1	1	1			
-6x=9 => -x=2/3	1					
-6x=9 | :(-6) => x=-6/9=(-2/3)	1	1			1	
-6x=9 | :(-6) => +x=15	1	1				1
-6x=9 | :-6 => x=9/6=3/2	1	1	1			
-6x=9 | *(-1) => 6x=9	6	6	6			
-6x=9 | :x => -6=9:x	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=	10	10				
-6x=9 | :6 => x=9:6	2	2	2			
-6x=9 | :6 => -x=2/3	2	2			2	
-6x=9 | :6 => x=1,3	1	1	1			
-6x=9 | :(-6) => x=+1,5	1	1	1			
-6x=9 | +(:6) => x=15	1	1				1
-6x=9 => -6/9=x	1					
-6x=9 | :6 => x=9/6	1	1	1			
-6x=9 | :6 => x=	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=9:-6	2	2				
-6x=9 | :(-6x) => x=-1,33	1					
-6x=9 | :(-6x) => x=1,33	1	1	1			
-6x=9 | :(-6) => x=2/3	2	2	2		2	
-6x=9 | (-6x) => x=-3	1	1	1			1
-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-1b3/6=-1b1/3	1					
-6x=9 | :-6 => x=-9/6=1b3/6=1b1/2	1	1	1			
-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=1b3/6=1b1/3	1	1	1			
-6x=9 | :(-6) => x-3	1	1				

Teiltabellen 122a: Fehlerklassifikation bei Umformungen von -6x=9

	falsch	erkannte Fehler	Fehlerart			
			Vorzeichen falsch	Vertauschung von Multiplikation und Division	Kehrwert gebildet	Vertauschung von Addition und Division
-6x=9 | +6x => x=15x	1					
-6x=9 => x=-1,3	1					
-6x=9 | :9 => x=-0,p6	1	1	1		1	
-6x=9 | :-6 => x=1,05	1	1	1			
-6x=9 | +6x => x=14x	1					
-6x=9 | :(-6) => x=1,05	1	1	1			
-6x=9 | :9 => x=0,6p6	2	2	2		2	
-6x=9 | :(-6) => x=-1,3	2					
-6x=9 | -9 => -6x=0	2	2				
-6x=9 | :(-6) => x=-0,p3	1					
-6x=9 | +6x => x=9+6x	2	2				2
-6x=9 | :-6 => x=-1,6	1					
-6x=9 | (-6) => x=9	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=1,_	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=-1/3	1					
-6x=9 | :(-6) => x=(-6/9)	1	1			1	
-6x=9 | :(-6) => x=15	1	1				1
-6x=9 | :(-6) => x=-9/-6	1	1	1			
-6x=9 | :-(6) => x=9	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-3/2=1b1/2	1	1	1			
-6x=9 | -6x => x=3	1	1				1
-6x=9 | :-6 => x=x	1					
-6x=9 | :-6 => x=-2/3	1	1			1	
-6x=9 | :(-6) => x=1b3/6=1b1/3	1	1	1			
-6x=9 | *(-6) => x=15	1	1				1
-6x=9 | -6 => x=9+6	2	2				2
-6x=9 | +6x => =9	1	1				
-6x=9 | +6x => 9+6=15	1	1				
-6x=9 | :(-6x) => x=1,5	1	1	1			
-6x=9 | :-6 => x=	2	2				
-6x=9 => x=-1,4	2					
-6x=9 | :(-6) => x=-1,35	1					
-6x=9 => x=-15	1	1	1			1
-6x=9 | :-6 => x=1,3	1	1	1			
-6x=9 | :9 => x=0,3	1					
-6x=9 | :(-6x) => x=-1b9/6	1					
-6x=9 | :(-6) => x=-2,5	1					
-6x=9 | +6 => -x=-3	1	1	1			1
-6x=9 | :(-6) => x=-6/9=-2/3	1	1			1	
-6x=9 | :(-6) => x=9-6	1	1				1
-6x=9 | -9 => x=-6	1					
-6x=9 | +6x => =9+6x	1	1				
-6x=9 | :6 => -x(6/9)	1	1				
-6x=9 => -6+13=9	1	1				

Teiltabellen 122a: Fehlerklassifikation bei Umformungen von -6x=9

			Fehlerart			
	falsch	erkannte Fehler	Vorzeichen falsch	Vertauschung von Multiplikation und Division	Kehrwert gebildet	Vertauschung von Addition und Division
-6x=9 | *(-6) => x=54	2	2	2	2		
-6x=9 | *(-6) => x=	1	1				
-6x=9 | :-6x => x=-1,3	1					
-6x=9 | -9 => =-6x-9	1	1				
-6x=9 | *6 => -x=54	1	1		1		
-6x=9 => +6x=9	1	1	1			
-6x=9 | +7 => x=6+9	1	1				1
-6x=9 => -6+15=9	2	2				
-6x=9 | +5x => x=-9+5x	1	1	1			
-6x=9 | :9 => x=0,p66	1	1	1		1	
-6x=9 | :(-6) => x=9	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=6/9	1	1	1		1	
-6x=9 | :(+6) => x=1b3/6	1	1	1			
-6x=9 | :-6 => x=1b1/2	1	1	1			
-6x=9 | :-6 => x=1b3/9	1	1	1			
-6x=9 | :(-6) => x=1b3/9	1	1	1			
-6x=9 | :(-6) => x=0,6p6	1	1	1		1	
-6x=9 | :(-6) => x=1,3	3	3	3			
-6x=9 | :(-6) => x=1b2/5	1	1	1			
-6x=9 => -6x+9	1	1				
-6x=9 | :6 => x=9	1	1				
-6x=9 | :+6 => x=1,5	1	1	1			
-6x=9 | :-6 => x=-1,3	1					
-6x=9 | :(-6) => -x=-1,5	1	1	1			
-6x=9 => -6x=9+x	1					
-6x=9 | :-6 => x=1,2	2	2	2			
-6x=9 | :(-6x) => x=9/6	1	1	1			
-6x=9 | +x => -6=9x	1					
-6x=9 | :6 => x=1,05	1	1	1			
-6x=9 | -9 => -9=-6x	1					
-6x=9 => x=-6x+9	1					
-6x=9 | +6 => x=15x	1					
-6x=9 => x=1,5	2	2	2			
-6x=9 => =-15x	1	1				
-6x=9 | +6 => 6x=15	1					
-6x=9 => x=9+6	2	2				2
-6x=9 => x=3	1	1				1
-6x=9 | -9 => -15x=	1	1				
-6x=9 | -9 => -6x	1	1				
-6x=9 | :-6 => x=3	1	1				1
-6x=9 | :(-6) => x=-15	1					
-6x=9 | +6x => x=9-6x	1	1				1
Gesamt Anzahl	402	359	144	11	26	144

Teiltabellen 122a: Fehlerklassifikation bei Umformungen von -6x=9

	falsch	erkannte Fehler	Fehlerart: Vertauschung von x-Term mit Konstante	Fehlerart: nur eine Seite umgeformt	Fehlerart: Bearbeitung abgebrochen	Fehlerart: Syntax verletzt
-6x=9 | +6 => x=15	83	83				
-6x=9 | +6 => x=9+6	24	24				
-6x=9 | :6 => x=1,5	10	10				
-6x=9 | :(+6) => x=1,5	2	2				
-6x=9 | +6x => x=9	5	5		5		
-6x=9 | :(-6) => x=1,5	27	27				
-6x=9 | -6 => x=9-6	3	3				
-6x=9 | +6x => x=15	2	2				
-6x=9 | *6 => x=54	2	2				
-6x=9 | :-6 => x=-6/9	3	3				
-6x=9 | :(-6) => x=-2/3	1	1				
-6x=9 | :-6x => x=9/6	1	1				
-6x=9 | :-6 => x=9	1	1		1		
-6x=9 | :6 => x=3/2	5	5				
-6x=9 | *(-1) => 6x=-4	1					
-6x=9 => -6*(-1,5)=9	2	2		2		
-6x=9 | :9 => -x=6/9	1	1				
-6x=9 | *6 => x=+54	1	1				
-6x=9 => x=-1,p33	1					
-6x=9 => -6*-1,5=9	2	2				2
-6x=9 | -9 => -15x=0	1	1	1			
-6x=9 | :(-6) => x=-6/9	7	7				
-6x=9 | :-6 => x=-1/2	1					
-6x=9 | *(-6) => x=-54	4	4				
-6x=9 | :(-6) => x=-54	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=3/2=1b1/2	1	1				
-6x=9 => x=-2/3	3					
-6x=9 => -1,5=9	1	1				1
-6x=9 => x=9/6=3/2	1	1				
-6x=9 => x=9/6	2	2				
-6x=9 => x=15	4	4				
-6x=9 | :6 => x=1,_	2	2				2
-6x=9 | +6x => 0=15x	1					
-6x=9 | :(-6) => x=9/6	5	5				
-6x=9 | +6x => =6x+9	1	1				1
-6x=9 | :-6 => x=1,5	6	6				
-6x=9 | :-6x => x=1,5	5	5				
-6x=9 | :-6 => x=9/6=1b3/6=1b1/2	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=9/6=1b3/6=1b1/2	2	2				
-6x=9 | :-6 => x=-0,5	2					
-6x=9 | *(-1/6) => x=1,5	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=-1b1/3	1					
-6x=9 | :(-6) => x=3/2	3	3				

Teiltabellen 122b: Fehlerklassifikation bei Umformungen von -6x=9

		erkannte Fehler	Fehlerart			
	falsch		Vertauschung von x-Term mit Konstante	nur eine Seite umgeformt	Bearbeitung abgebrochen	Syntax verletzt
-6x=9 | :(-6) => x=-3	3	3				
-6x=9 | :-6 => x=3/2	1	1				
-6x=9 | :6 => x=9/6=1b1/2	1	1				
-6x=9 | :x => -6=9x	1					
-6x=9 | :-6x => 1=-9-6x	1					
-6x=9 | :-6 => x=9/6	2	2				
-6x=9 | :(-6) => x=-1,_	1	1				1
-6x=9 | :(-6) => x=1,6	2	2				
-6x=9 | *(-1/6) => x=3/2	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=-9/3	1	1				
-6x=9 | *(-1/6) => x=9/6=3/2	1	1				
-6x=9 | :6 => -x=1/2	1					
-6x=9 | *(-1/6) => x=9/6	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=1b1/2	2	2				
-6x=9 | -6 => x=3	5	5				
-6x=9 | +6x => 9+6x	1	1				1
-6x=9 | :-6 => -3/2=-9/6=x	1					
-6x=9 | :(-6) => x=9/6=3/2	1	1				
-6x=9 => -x=2/3	1					
-6x=9 | :(-6) => x=-6/9=(-2/3)	1	1				
-6x=9 | :(-6) => +x=15	1	1				
-6x=9 | :-6 => x=9/6=3/2	1	1				
-6x=9 | *(-1) => 6x=9	6	6				
-6x=9 | :x => -6=9:x	1	1				1
-6x=9 | :(-6) => x=	10	10			10	
-6x=9 | :6 => x=9:6	2	2				
-6x=9 | :6 => -x=2/3	2	2				
-6x=9 | :6 => x=1,3	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=+1,5	1	1				
-6x=9 | +(:6) => x=15	1	1				
-6x=9 => -6/9=x	1					
-6x=9 | :6 => x=9/6	1	1				
-6x=9 | :6 => x=	1	1			1	
-6x=9 | :(-6) => x=9:-6	2	2				2
-6x=9 | :(-6x) => x=-1,33	1					
-6x=9 | :(-6x) => x=1,33	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=2/3	2	2				
-6x=9 | (-6x) => x=-3	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-1b3/6=-1b1/3	1					
-6x=9 | :-6 => x=-9/6=1b3/6=1b1/2	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=1b3/6=1b1/3	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x-3	1	1				1

Teiltabellen 122b: Fehlerklassifikation bei Umformungen von -6x=9

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th></th><th rowspan="2">erkannte Fehler</th><th colspan="4">Fehlerart</th></tr>
<tr><th>falsch</th><th>Vertau-schung von x-Term mit Kons-tante</th><th>nur eine Seite umge-formt</th><th>Bearbei-tung abge-brochen</th><th>Syntax verletzt</th></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => x=15x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=-1,3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :9 => x=-0,p6</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=1,05</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => x=14x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1,05</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :9 => x=0,6p6</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-1,3</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -9 => -6x=0</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-0,p3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => x=9+6x</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=-1,6</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | (-6) => x=9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1,_</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-1/3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=(-6/9)</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=15</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-9/-6</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-(6) => x=9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-3/2=1b1/2</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -6x => x=3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=-2/3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1b3/6=1b1/3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *(-6) => x=15</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -6 => x=9+6</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => =9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => 9+6=15</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6x) => x=1,5</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=-1,4</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-1,35</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=-15</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=1,3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :9 => x=0,3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6x) => x=-1b9/6</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-2,5</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6 => -x=-3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-6/9=-2/3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=9-6</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -9 => x=-6</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => =9+6x</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => -x(6/9)</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 => -6+13=9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teiltabellen 122b: Fehlerklassifikation bei Umformungen von -6x=9

			Fehlerart			
	falsch	erkannte Fehler	Vertau-schung von x-Term mit Kons-tante	nur eine Seite umge-formt	Bearbei-tung abge-brochen	Syntax verletzt
-6x=9 | *(-6) => x=54	2	2				
-6x=9 | *(-6) => x=	1	1			1	
-6x=9 | :-6x => x=-1,3	1					
-6x=9 | -9 => =-6x-9	1	1				1
-6x=9 | *6 => -x=54	1	1				
-6x=9 => +6x=9	1	1		1		
-6x=9 | +7 => x=6+9	1	1				
-6x=9 => -6+15=9	2	2		2		
-6x=9 | +5x => x=-9+5x	1	1				
-6x=9 | :9 => x=0,p66	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=9	1	1		1		
-6x=9 | :(-6) => x=6/9	1	1				
-6x=9 | :(+6) => x=1b3/6	1	1				
-6x=9 | :-6 => x=1b1/2	1	1				
-6x=9 | :-6 => x=1b3/9	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=1b3/9	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=0,6p6	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=1,3	3	3				
-6x=9 | :(-6) => x=1b2/5	1	1				
-6x=9 => -6x+9	1	1				1
-6x=9 | :6 => x=9	1	1		1		
-6x=9 | :+6 => x=1,5	1	1				
-6x=9 | :-6 => x=-1,3	1					
-6x=9 | :(-6) => -x=-1,5	1	1				
-6x=9 => -6x=9+x	1					
-6x=9 | :-6 => x=1,2	2	2				
-6x=9 | :(-6x) => x=9/6	1	1				
-6x=9 | +x => -6=9x	1					
-6x=9 | :6 => x=1,05	1	1				
-6x=9 | -9 => -9=-6x	1					
-6x=9 => x=-6x+9	1					
-6x=9 | +6 => x=15x	1					
-6x=9 => x=1,5	2	2				
-6x=9 => =-15x	1	1				1
-6x=9 | +6 => 6x=15	1					
-6x=9 => x=9+6	2	2				
-6x=9 => x=3	1	1				
-6x=9 | -9 => -15x=	1	1				1
-6x=9 | -9 => -6x	1	1				1
-6x=9 | :-6 => x=3	1	1				
-6x=9 | :(-6) => x=-15	1					
-6x=9 | +6x => x=9-6x	1	1				
Gesamt Anzahl	402	359	1	19	14	21

Teiltabellen 122b: Fehlerklassifikation bei Umformungen von -6x=9

			richtig umgeformt	falsch umgeformt
			Anzahl	Anzahl
Schülernummer	13	-6x=9 | +6 => x=9+6		1
		-6x=9 | :6 => x=1,5		1
	17	-6x=9 | +6 => x=9+6		1
		-6x=9 | :(-6) => -x=1,5	1	
	32	-6x=9 | :(-6) => x=1,5		1
		-6x=9 | *(-6) => x=-1,5	1	
	35	-6x=9 | +6 => x=9+6		1
		-6x=9 | :-6 => x=-9/6=-3/2	1	
	65	-6x=9 | :(-6) => x=-3/2	1	
		-6x=9 | :(-6) => x=-2/3		1
	67	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
	74	-6x=9 => -6*(-1,5)=9		2
	98	-6x=9 | :(-6) => x=1,5		2
	120	-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
		-6x=9 | -9 => -15x=0		1
	125	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
	131	-6x=9 | :-6 => x=-1/2		1
		-6x=9 | *(-6) => x=-54		1
	149	-6x=9 | :6 => x=3/2		2
	181	-6x=9 => x=9/6=3/2		1
		-6x=9 => x=9/6		1
	189	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
	191	-6x=9 | +6 => x=9+6		1
		-6x=9 | :(-6) => x=1,5		1
	225	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-3/2	1	
	243	-6x=9 | :(-6) => x=9/6=1b3/6=1b1/2		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-1b3/6=-1b1/2	1	
	245	-6x=9 | :-6 => x=-0,5		2
	247	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=1b3/6	1	
	256	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-3/2	1	
	277	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=3/2		1
	280	-6x=9 | *(-6) => x=-54		1
		-6x=9 | :-6 => x=3/2		1
	282	-6x=9 | :(-6) => x=1,5		2
	306	-6x=9 | :-6 => x=-9/6	1	
		-6x=9 | :6 => x=9/6=1b1/2		1
	318	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-3b1/3	1	
	345	-6x=9 | :(-6) => x=-9/6	1	
		-6x=9 | :(-6) => x=-9/3		1

Teiltabellen 123: Umformungen von Schülerinnen und Schülern, die die Gleichung -6x=9 während des Tests zweimal umformten und diese Umformung mindestens einmal fehlerhaft ist.

			richtig umgeformt	falsch umgeformt
			Anzahl	Anzahl
Schülernummer	405	-6x=9 => x=-9/6	1	
		-6x=9 | -6 => x=3		1
	465	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=9/6=3/2		1
	467	-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
		-6x=9 | :(-6) => x=1,5		1
	473	-6x=9 | :(-6) => x=-6/9		2
	484	-6x=9 | :6 => -x=2/3		2
	524	-6x=9 | :(-6) => +x=15		1
		-6x=9 | :-6 => x=9/6=3/2		1
	550	-6x=9 | :(-6x) => x=-1,33		1
		-6x=9 | :(-6x) => x=1,33		1
	554	-6x=9 | :(-6) => x=2/3		2
	563	-6x=9 | :(-6) => x=9/6=1b3/6=1b1/2		1
		-6x=9 | :-6 => x=-9/6=1b3/6=1b1/2		1
	571	-6x=9 | :(-6) => x=-3		1
		-6x=9 | :(-6) => x-3		1
	574	-6x=9 | :(-6) => x=9/6		2
	576	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=9/-6=-1b3/6	1	
	579	-6x=9 | :(-6) => x=1,5		2
	583	-6x=9 | +6x => x=9		1
		-6x=9 | +6x => x=15x		1
	586	-6x=9 | :-6x => x=1,5		2
	590	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :-6 => x=-1,5	1	
	592	-6x=9 | :-6 => x=-1,5	1	
		-6x=9 | :-6 => x=1,5		1
	614	-6x=9 | :6 => x=1,5		2
	636	-6x=9 | +6 => x=9+6		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
	642	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=15		1
	655	-6x=9 | :-6 => x=-1,5	1	
		-6x=9 | :-6 => x=1,05		1
	666	-6x=9 | :9 => x=0,6p6		2
	668	-6x=9 | :-6 => x=-1,5	1	
		-6x=9 | :-6 => x=1,5		1
	683	-6x=9 | :-3 => 2x=-3	1	
		-6x=9 | :-6 => x=-2/3		1
	695	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | *(-6) => x=15		1
	704	-6x=9 => -6x=9	1	
		-6x=9 | +6x => =9		1
	711	-6x=9 => x=-1,4		2
	718	-6x=9 | +6 => x=15		2
	719	-6x=9 | :-6 => x=1,3		1
		-6x=9 | :9 => x=0,3		1

Teiltabellen 123: Umformungen von Schülerinnen und Schülern, die die Gleichung -6x=9 während des Tests zweimal umformten und diese Umformung mindestens einmal fehlerhaft ist.

			richtig umgeformt	falsch umgeformt
			Anzahl	Anzahl
Schülernummer	723	-6x=9 | *(-6) => x=-54		1
		-6x=9 | :(-6) => x=		1
	726	-6x=9 | :(-6) => x=1,5		1
		-6x=9 | -6 => x=3		1
	757	-6x=9 | *(-6) => x=54		2
	758	-6x=9 | :(-6) => x=		1
		-6x=9 | *(-6) => x=		1
	782	-6x=9 | :-6 => x=1,5		1
		-6x=9 => -6+15=9		1
	785	-6x=9 | +6x => x=9		1
		-6x=9 | :-6x => x=1,5		1
	801	-6x=9 | :(-6) => x=-9/6	1	
		-6x=9 | :(-6) => x=-6/9		1
	808	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=9		1
	811	-6x=9 | +6x => x=9		1
		-6x=9 | :(-6) => x=6/9		1
	815	-6x=9 | :(-6) => x=		2
	826	-6x=9 | :(-6) => x=1,3		2
	833	-6x=9 => -6x=9	1	
		-6x=9 | -6 => x=3		1
	850	-6x=9 | :(-6) => x=		1
		-6x=9 | :-6 => x=		1
	860	-6x=9 | :-6 => x=1,2		2
	897	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | -9 => -15x=		1
	900	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-1b1/2	1	
	903	-6x=9 | :(-6) => x=		1
		-6x=9 | :-6 => x=3		1
	904	-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
		-6x=9 | :(-6) => x=-15		1
	909	-6x=9 | *(-1) => 6x=9		2
	916	-6x=9 | :(-6) => x=-9/6	1	
		-6x=9 | *(-1) => 6x=9		1

Teiltabellen 123: Umformungen von Schülerinnen und Schülern, die die Gleichung -6x=9 während des Tests zweimal umformten und diese Umformung mindestens einmal fehlerhaft ist.

			Gesamt	falsche Umformung		Aufgabe richtig gelöst	
				richtige Umformung	falsche Umformung	Nein	Ja
Ergebnis	x=2	Anzahl	518	512	6	13	505
		Anzahl in Prozent	67,8%	67,0%	,8%	1,7%	66,1%
	x=2000	Anzahl	81		81	81	
		Anzahl in Prozent	10,6%		10,6%	10,6%	
	x=1000	Anzahl	42	3	39	42	
		Anzahl in Prozent	5,5%	,4%	5,1%	5,5%	
	2=x	Anzahl	18	18		2	16
		Anzahl in Prozent	2,4%	2,4%		,3%	2,1%
	x=-2	Anzahl	10	10		10	
		Anzahl in Prozent	1,3%	1,3%		1,3%	
	x=10	Anzahl	9	8	1	9	
		Anzahl in Prozent	1,2%	1,0%	,1%	1,2%	
	x=2000/1000	Anzahl	6	6			6
		Anzahl in Prozent	,8%	,8%			,8%
	x=0,5	Anzahl	5		5	5	
		Anzahl in Prozent	,7%		,7%	,7%	
	x=1/2	Anzahl	5	1	4	5	
		Anzahl in Prozent	,7%	,1%	,5%	,7%	
	1x=2	Anzahl	4	4			4
		Anzahl in Prozent	,5%	,5%			,5%
	2000=x	Anzahl	4		4	4	
		Anzahl in Prozent	,5%		,5%	,5%	
	-1000=x	Anzahl	3		3	3	
		Anzahl in Prozent	,4%		,4%	,4%	
	x=2000/1000=2	Anzahl	3	3			3
		Anzahl in Prozent	,4%	,4%			,4%
	x=-1000	Anzahl	3		3	3	
		Anzahl in Prozent	,4%		,4%	,4%	
	x=+2	Anzahl	2	2			2
		Anzahl in Prozent	,3%	,3%			,3%
	-2=x	Anzahl	2	2		2	
		Anzahl in Prozent	,3%	,3%		,3%	
	x=2000000	Anzahl	2		2	2	
		Anzahl in Prozent	,3%		,3%	,3%	
	-2000/5000=x	Anzahl	2	1	1	2	
		Anzahl in Prozent	,3%	,1%	,1%	,3%	
	x=1000/2000	Anzahl	2		2	2	
		Anzahl in Prozent	,3%		,3%	,3%	
	x=2000/5000	Anzahl	2	2		2	
		Anzahl in Prozent	,3%	,3%		,3%	
	x=15000	Anzahl	2		2	2	
		Anzahl in Prozent	,3%		,3%	,3%	

Teiltabellen 124: Endergebnisse bei 3000x + 4000 = 2000x + 6000 (berücksichtigt sind nur die Fälle, bei denen eine Endform der Art x = D angegeben wurde)

			Gesamt	falsche Umformung		Aufgabe richtig gelöst	
				richtige Umformung	falsche Umformung	Nein	Ja
Ergebnis	x=1	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=0	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=-2000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=5	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=4	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=2,5	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	-2=-x	Anzahl	1	1			1
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%			,1%
	x=-4	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=7500	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=0,4	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	1000/2000=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=2000/3000-2000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	1000000=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=1/2000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=2/1=2	Anzahl	1	1			1
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%			,1%
	0,5=x	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=2/1	Anzahl	1	1			1
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%			,1%
	x=-2/5	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	5000/2000=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=-2000/-1000	Anzahl	1	1			1
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%			,1%
	x=-2000/1000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	

Teiltabellen 124: Endergebnisse bei 3000x + 4000 = 2000x + 6000 (berücksichtigt sind nur die Fälle, bei denen eine Endform der Art x = D angegeben wurde)

			Gesamt	falsche Umformung		Aufgabe richtig gelöst	
				richtige Umformung	falsche Umformung	Nein	Ja
Ergebnis	1/2=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	-7000=x	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=998,5	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=9000	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	750=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=1,10	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=1,4	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	1000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=3000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x0,5	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	-2000/-1000=x	Anzahl	1	1			1
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%			,1%
	x=200	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	15000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=-3000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=5000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=-8000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=+2000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	-1150=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
Gesamt	Anzahl		764	588	176	223	541

Teiltabellen 124: Endergebnisse bei 3000x + 4000 = 2000x + 6000 (berücksichtigt sind nur die Fälle, bei denen eine Endform der Art x = D angegeben wurde)

			Aufgabe richtig gelöst		Gesamt
			Nein	Ja	
	Lehrer	Anzahl	3804	5448	9252
		% von Lehrer / Lehrerin	41,1%	58,9%	100,0%
	Lehrerin	Anzahl	1201	2039	3240
		% von Lehrer / Lehrerin	37,1%	62,9%	100,0%
Gesamt[a]		Anzahl	5005	7487	12492
		% von Lehrer / Lehrerin	40,1%	59,9%	100,0%

a. chi-quadrat = 16,37 df = 1

Tabelle 125: Kreuztabelle: Geschlecht des Lehrers - Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler

Geschlecht der Schüler				Aufgabe richtig gelöst		Gesamt
				Nein	Ja	
weiblich[a]		Lehrer	Anzahl	2061	2925	4986
			% von Lehrer / Lehrerin	41,3%	58,7%	100,0%
		Lehrerin	Anzahl	608	1066	1674
			% von Lehrer / Lehrerin	36,3%	63,7%	100,0%
	Gesamt		Anzahl	2669	3991	6660
			% von Lehrer / Lehrerin	40,1%	59,9%	100,0%
männlich[b]		Lehrer	Anzahl	1743	2523	4266
			% von Lehrer / Lehrerin	40,9%	59,1%	100,0%
		Lehrerin	Anzahl	593	973	1566
			% von Lehrer / Lehrerin	37,9%	62,1%	100,0%
	Gesamt		Anzahl	2336	3496	5832
			% von Lehrer / Lehrerin	40,1%	59,9%	100,0%

a. chi-quadrat = 13,13 df = 1

b. chi-quadrat = 4,27 df = 1

Tabelle 126: Kreuztabelle: Geschlecht des Lehrers - Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler
(gruppiert nach Geschlecht der Schüler)

7. Schluß

7.1. Rückblick

Ziel dieser Arbeit war es, einen Überblick über Schwierigkeitsgrade von Aufgaben, Fehlermuster bei Aufgaben und verwendete Strategien zum Lösen zu erhalten.

Durch den Einsatz einer zu entwickelnden Software sollte es möglich sein, auch große Datenmengen zu untersuchen und zusätzlich zum Lösungsprodukt (den vorliegenden schriftlichen Schülerlösungen) auch den Lösungsprozess zugänglich zu machen und zu analysieren.

Neben der theoretischen Zusammenstellung standen die eigentliche Untersuchung und die Softwareentwicklung im Vordergrund.

Bei der theoretischen Aufarbeitung wurden im Wesentlichen die Arbeiten und Untersuchungen mit entsprechenden Ergebnissen, die für die Testkonstruktion und für die Analyse wichtig waren, dargelegt und gegenübergestellt.

Bei der Testkonstruktion hätte ich gerne auf eine Aufgabenkonstruktion mit Hilfe einer Diagnosematrix zurückgegriffen. Wie dargelegt war das aufgrund der Ergebnisse aus diesem Bereich nicht möglich. Somit bestand das Problem, dass sich die Untersuchung nicht am klassischen Design orientieren konnte. Sowohl für den Bereich der Schwierigkeitsanalyse der Aufgaben als auch für den Bereich des Lösungserfolgs der Schülerinnen und Schüler überwiegt der explorative Charakter.

Aus ausführlich dargelegten Gründen habe ich mich für eine deskripitive Fehleranalyse und keine kognitive Fehleranalyse entschieden.

Ich gehe davon aus, dass ich aufgezeigt habe, dass es mit Hilfe der Software KEFA gelungen ist, eine Schwäche der deskriptiven Fehleranalyse zu beheben. Es ist gelungen den Lösungsprozess zugänglich zu machen. Außerdem wird das „Handling“ von großen Datenmengen vielleicht erstmals möglich.

Die Entwicklung von KEFA war von vornherein nicht nur auf den Bereich der Gleichungen beschränkt. Durch die modulare Entwicklung ist es mir gelungen, ein Werkzeug zu konstruieren, das bei zukünftigen Untersuchungen im syntaktischen Bereich der Mathematik zur Verfügung steht.

Zusätzlich dazu wurde mit Techniken aus dem Bereich der KI ein erstes Regelwerk entwickelt, das die Analyse im Sinne eines Expertensystems zukünftig übernehmen kann.
Inwieweit dieses System Eingang bei Tutoriellen Systemen finden wird, wird die Zukunft zeigen.

Für die Mathematikdidaktik sind die Ergebnisse der Untersuchung zum Teil überraschend. So zeigte sich unter anderem, dass der Lösungserfolg, nicht wie erwartet, einfach von der Komplexität der Aufgabe abhängig ist und dass der fehleranfälligste Umformungsschritt nicht der erste, sondern der letzte ist.

Die leichteste Aufgabe ist von der Form B + x = D. Die im Vorfeld ebenfalls als einfach eingestufte Aufgabe der Form Ax = D wird dagegen nicht mal zu 50% richtig gelöst. Die Gleichung -6x = 9 ist außerdem die am häufigsten falsch umgeformte Gleichung bei der gesamten Untersuchung.

Schon Matz (1982) hatte darauf hingewiesen, dass die Behandlung von einfachen Gleichungen bei der Einführung der Gleichungslehre nicht dazu führt, dass sich ein entsprechendes Lösungskonzept bei den Schülerinnen und Schülern ausbildet. Dies gilt sicherlich für die Formen x + B = D. Insofern war die Kritik der Befürworter der „neuen Gleichungslehre“ berechtigt.

Allerdings zeigen die Auswertungen der Untersuchung, dass Gleichungen der Art Ax = D nicht zu den einfachen Gleichungen gehören.

Die Ergebnisse von Ekenstam/Nilsson (1979) bestätigten sich. Der Lösungserfolg hing vom Zahlenraum des Ergebnisses ab.

Außerdem zeigt sich insbesondere bei der Feinklassifikation der Fehler, dass es Aufgaben gibt, die sich aufgrund der Vielfalt der gemachten Fehler einer sinnvollen Klassifikation entziehen. Das bedeutet, dass die Fehlervielfalt insgesamt groß ist, es aber ebenso Aufgaben gibt, bei denen diese Vielfalt klein wird und solche, wo die Vielfalt groß bleibt.

Große Schwierigkeiten bestehen im Zusammenhang mit der Null im Ergebnis, wie der Lösungserfolg der Sonderaufgabe 4x = 9x zeigt.

Der Hauptfehler ist sicherlich der Vorzeichenfehler. Eine sehr große Rolle spielen aber auch die Vertauschung der Addition mit der Subtraktion und die Vertauschung der Addition mit der Division, die üblicherweise als Konkatenationsfehler bezeichnet wird.

Insbesondere der Fehler „Vertauschung von Addition und Subtraktion“ bestätigt das Schüler-Lehrer-Dilemma. Die Schülerinnen und Schüler bringen „etwas herüber“ statt auf beiden Seiten „das Gleiche zu tun“. Um diese Situation im Unterricht zu verändern, hat Malle sein „Elementarumformungskonzept“ entwikkelt. Inwieweit damit der Lösungserfolg verbessert wird, bleibt abzuwarten. Zu hoffen ist allerdings, dass dieses Konzept zukünftig in den Unterricht Eingang findet.

Für den Unterricht ergeben sich ganz konkrete Folgerungen. Der Übungsbereich muss auch Aufgaben, bei denen die Koeffizienten große und sehr große Zahlen sind, enthalten, wenn ein Realtitätsbezug im Mathematikunterricht eine

Rolle spielen soll. Gleiches ist für kleine und sehr kleine Zahlen (siehe z. B. den Bereich der Wahrscheinlichkeit) zu vermuten. Insbesondere der letzte Umformungsschritt und damit Gleichungen der Form Ax=D dürfen beim Üben nicht vernachlässigt werden.

Insgesamt ist der Lösungserfolg (mit knapp über 50%) als sehr gering zu bezeichnen. Das hat Auswirkungen für den weiteren Unterricht und sollte berücksichtigt werden.

Ferner zeigt sich eine interessante Situation bei der Betrachtung der Fehler und der damit verknüpften Fehleranalyse. Dieses erinnert an die „Unschärferelation". Sobald man den Schüler, der einen Fehler macht und damit die schülerspezifische Ursache des Fehlers und diesen Fehler gleichzeitig so genau wie möglich analysieren will, geht entweder der Fehler oder der Schüler „verloren". Das soll bedeuten, dass, wenn man den Fehler festhält, man keine genaue Aussage über den Schüler mehr machen kann und wenn man den Schüler festhält, man keine genaue Aussage mehr über den Fehler erhält. Als Beleg hierfür sehe ich die Ergebnisse über die Konsistenz von Fehlern bei der Gleichung -6x=9 an.

Forschungsmethodisch hat dies zur Folge, dass in diesem Bereich mit Einzelfallstudien nicht gearbeitet werden sollte. Die dadurch zu gewinnenden Forschungshypothesen lassen sich sicherlich auch auf andere Art generieren.

Für den Unterricht hätte dies aber positive Auswirkungen. Die Lehrerin und der Lehrer wären nicht gezwungen, bei jeder Schülerin und jedem Schüler nach den individuellen Fehlerursachen zu forschen, was in der Praxis sowieso nicht möglich ist. Es genügt lediglich zu wissen, dass bei einer Gruppe von Schülerinnen und Schülern der Fehler einer speziellen Art mit einer Wahrscheinlichkeit von x % zu erwarten ist und der Unterricht darauf abgestimmt sein sollte.

7.2. Ausblick

Die Ergebnisse der Untersuchung sollen in Zukunft zur Weiterentwicklung von KEFA und dem Regelwerk genutzt werden. Dann können Folgeuntersuchungen mit erheblich geringerem Aufwand durchgeführt und ausgewertet werden.

Aufgrund der Ergebnisse dieser Untersuchung kann eine Vielzahl an Hypothesen erstellt werden, die überprüft werden sollte.

Insbesondere ist zu untersuchen, inwieweit es gelingen kann, bei den Fehlern algebraische von arithmetischen zu trennen. Bei meiner bisherigen Analyse war dies bislang nicht möglich. Ein Vorschlag wäre die Fehler in folgende vier Gruppen zu unterteilen:

- Fehler 1. Art: „algebraischer Fehler"
- Fehler 2. Art: „syntaktisch-arithmetischer Fehler"
- Fehler 3. Art: „Rechenfehler"
- Fehler 4. Art: „sonstiger Fehler"

Zum Fehler 1. Art würden sicherlich die Fehlerarten „Vertauschung von Addition und Division“, „Vertauschung von x-Term und Konstante“ und „nur eine Seite umgeformt“ gehören.

Zum Fehler 2. Art würden dagegen eher die Fehlerarten „Vertauschung von Addition und Subtraktion“, „Vertauschung von Multiplikation und Division“, „Kehrwert gebildet“ und „Vorzeichen falsch“ gehören.

Zum Fehler 3. Art würden dann „Rechenfehler“ gehören.

Hierdurch wäre eine Hierarchie der Fehler gegeben.

Außerdem sind die vorhandenen Daten mit den hier vorgestellten Auswertungen noch nicht ansatzweise erschöpfend untersucht. Weitere Ergebnisse sollen in Zukunft präsentiert werden.

Im syntaktischen Bereich ist das Gebiet des Formelrechnens bislang gering untersucht. Hier könnte KEFA als Werkzeug zur Analyse und Auswertung mit einigem Programmieraufwand große Dienste erweisen.

Eine Einbindung von KEFA in ein adaptives Diagnosesystem beurteile ich aufgrund der bisherigen Erfahrungen eher skeptisch, da dies aufgrund der zu vermutenden geringen Konsistenz von Fehlern wenig Aussicht auf einen nennenswerten Erfolg verspricht.

Literaturverzeichnis

Hier ist nur die Literatur aufgeführt, auf die Bezug genommen wird oder die zitiert ist. Entsprechende Seitenangaben sind in Klammern angeführt.

Eine ausführliche Liste mit weiterführender Literatur ist dem Literaturverzeichnis von Malle 1993 zu entnehmen. Eine weitere sehr aktuelle Quellenangabe ist in der Dissertation von Kromer, G.: Schwierigkeiten von Schülern mit der Algebra, Freiburg, 1996 zu finden.

Andelfinger, B.: Didaktischer Informationsdienst Mathematik, Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen, Soest 1985
(1, 2)

Anderson, J. R.: Intelligent Tutoring Systems, in: Science Vol.228, S. 456 - 462, 1985
(61)

Anderson, J. R.: The Architecture of Cognition, Mahwah 1996
(61)

Baumert, J. / Lehmann, R.: TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich, Deskriptive Befunde, Opladen 1997
(21)

Beaton / Mullis / Martin / Gonzalez / Kelly / Smith: Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA‘s Third International Mathematics and Science Study (TIMSS), Boston, 1996
(1, 15, 21, 22, 60)

Bernard, J. / Cohen, M.: An Integration of Equatation-solving Methods into a Development Learning Sciences, in: Coxford, A. / Schulte, A. (eds.): The Ideas of Algebra, K-12, S. 97 - 111, Reston, 1988
(49, 50)

Booth, L. R.: Children’s Strategies and Errors, Windsor, Berkshire 1984
(30, 76)

Brown, J.S, /Burton, R.R.: Diagnostic Models for Procedural Bugs in Basic Mathematic Skills, in: Cognitive Science 2 , S. 155 - 192, 1978
(68, 69)

Brown, J.S./Van Lehn, K.: Repair Theory: A Generative Theory of Bugs in Procedurale Skills, in: Cognitive Science 4, S. 379 - 426 , 1980
(58, 67, 69, 73)

Bruner, J. S. : Der Prozeß der Erziehung, Düsseldorf 1970
(10, 11, 73)

Chalouh, L. / Herscovics, N.: Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way, in: Coxford, A. / Schulte, A. (eds.): The Ideas of Algebra, K-12, S. 33 - 42, Reston, 1988
(30)

Cortes, A.: Analysis of Errors and a Cognitive Model in the Solving of Equations, in: Proceedings of PME-17, S.146 - 153, 1993
(82, 86 – 90, 140)

Davis, R. B.: Cognitive Processes involved in Solving Simple Algebraic Equations , in: Journal of Children's Mathematical Behavior 1 (3) , S. 7 - 35, 1975
(76)

Davis, R. B.: Diversity of Errors in Mathematics, in: The Journal of Mathematical Behavior 3 (2), S. 73 - 77, 1982
(69, 69, 72, 73)

Davis, E. J. / Cooney, T. J.: Identifying Errors in Solving Certain Linear Equations in: The Matyc Journal 11, S. 170 - 178, 1978
(82 – 86, 140)

Davis, R. B./McKnight, C. C.: Modelling the Processes of Mathematical Thinking, in: Journal of Children's Mathematical Behavior 2 (2), S. 91 - 113, 1979
(58, 67, 68, 72, 73, 97)

Delegierten der Ständigen Konferenz der Kultusminister bei der OECD (hrsg.): Synopsis für moderne Schulmathematik, Frankfurt 1974
(7)

Dehaene, S.: The Number Sense – How the Mind Creates Mathematics, New York 1997
(73)

Ekenstam, A. / Nilsson, M.: A New Approach to the Assessment of Children's Mathematical Competence, in: Educational Studies in Mathematics 10, S. 41 - 46, 1979
(63, 65 – 67, 112, 314)

Ekenstam, A. / Greger, K. : Programming and Understanding of Variables, in: JMD 10, Heft 2, S. 99 - 121, 1989
(30)

Filloy, E. / Rojano, T.: Solving Equations, in: For the Learning of Mathematics 9 (2), S. 19 - 25, 1989
(43, 44)

Franke, M. / Wynands, A.: Zum Verständnis von Variablen – Testergebnisse in 9. Klassen Deutschlands, in: Mathematik in der Schule 29 (10), S. 674 – 691, 1991
(30)

Führer, L.: Pädagogik des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1997
(70)

Gerster, H.: Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren - Diagnose und Therapie, Freiburg, 1982
(57, 59, 60, 64, 140)

Hart, K.: Children's Understanding of Mathematics: 11 - 16, London 1981
(29, 30)

Hasemann, K.: Die Beschreibung von Schülerfehlern mit kognitionstheoretischen Modellen, in: Der Mathematikunterricht 31, Heft 6, 1985, S. 6 - 17
(68)

Hasemann, K.: Mathematische Lernprozesse: Analysen mit kognitionstheoretischen Modellen, Braunschweig, 1986
(57, 58, 76)

Hasemann, K.: Kognitionstheoretische Modelle und mathematische Lernprozesse, in: JMD 9, Heft 2/3 , S. 95 - 161, 1988
(58, 60)

Herscovics, N. / Kieran, C.: Constructing Meaning for the Concept of Equation, in: Mathematics Teacher 73 (8), S. 572 - 580, 1980
(48)

Hoppe, R.: Fehleranalyse auf der Basis von Regelsystemen, ein Ansatz zur Analyse von Mathematikleistungen auf Individual- und Klassenebene, München, 1987
(59, 61 – 63, 140, 188, 199)

Kieran,C.:The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective, in: Kieran, C. / Wagner, S. (eds.): Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra , S. 33 - 56, Reston 1989
(74, 75)

Kieran, C. : The Learning and Teaching of School Algebra, in: Grouws, D. (ed.): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, S. 390 - 419, New York 1992
(50, 77, 78)

Kilborn, W. / Johansson, B.: Ett diagnosinstrument för arithmetikundervisning, Göteborg 1974
(60, 64)

Kropp, G.: Geschichte der Mathematik, Wiesbaden 1994
(1)

Küchemann, D.: Algebra, in: Hart, K. (ed.): Children's understanding of Mathematics: 11 - 16, S. 102-119, London 1981
(29 – 31, 55, 58, 75)

Kutzler, B.: The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics, http://www.kutzler.com/bk/a-pt/ped-tool.html, 1999
(23, 24)

Lauter, J.: Aufbau der elementaren Gleichungslehre nach logischen und mengentheoretischen Gesichtspunkten, in: MU 10 (5), S. 59 - 119, 1964
(7, 8, 26, 33, 42)

Lörcher, G. A.: Diagnose von Schülerschwierigkeiten beim Bruchrechnen, in: Pädagogische Welt 36 (3), S. 171 - 180, 1982
(57, 59, 64)

Lörcher, G. A.: Schülerschwierigkeiten bei der Addition und Subtraktion von Termen , in: Kupari, P. (ed.): Mathematics Education Research in Finland, S. 65 - 84, 1987
(59, 63 – 65, 140)

Lörcher, G. A.: Fachliche Grundlagen des Mathematikunterrichts im 7./8. Schuljahr (Skript), Freiburg 1995a
(31 – 35, 49 – 53, 46, 140)

Lörcher, G. A.: Der Lehrplan und seine Inhalte (Skript), Freiburg 1995b
(44)

Lörcher, G. A.: Schwierigkeitsanalyse bei Aufgaben im MU – Vortrag anläßlich des didaktischen Kolloquiums der Universität Hildesheim am 6.7.1998, S. 3, 1998
(93)

Lörcher, G. A. / Maier, P. H.: Was erreichen Schüler und Lehrer im Fach Mathematik? Eine empirische Analyse der Realschulabschlussprüfung 1998 in Baden - Württemberg, Freiburg 1999
(22)

Lorenz, J. H.: Lernschwierigkeiten und Einzelfallhilfe, Göttingen 1987
(58)

Lorenz, J. H.: Zur Methodologie der Fehleranalyse in der mathematik-didaktischen Forschung - oder: Wieweit sind Rezeptionen der Fehleranalyse fehlerhaft? , in: JMD 8, Heft 3 , S. 250 - 228, 1987a
(58)

Lorenz J. H. / Radatz, H.: Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht, Hannover 1993
(147)

Malle, G.: Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Braunschweig 1993
(6, 10, 11, 27 – 37, 41 – 48, 58, 68, 72 – 76, 79, 98, 140, 142, 145, 314)

Matz, M.: Towards a Computational Theory of Algebraic Competence , in: Journal of Mathematical Behavior 3, 1 , S. 93 - 166, 1980
(54, 70, 72)

Matz, M.: Towards a Process Model for High School Algebra Errors, in: Sleeman, D. / Brown, J. (eds.): Intelligent Tutoring Systems, S. 25 - 50, London 1982
(54, 67, 70 – 81, 91, 98, 153, 172, 321)

Padberg, F.: Aus Fehlern lernen, in: Friedrich Jahresheft XIV, S. 56 - 59, 1996
(56)

Pickert, G.: Bemerkungen zum Variablenbegriff, in: Mathematisch-physikalische Semesterberichte 7, S. 76 - 88, 1961
(28)

Popp, W.: Geschichte der Mathematik im Unterricht, München 1968
(1)

Radatz, H.: Schülerfehler im mathematischen Lernprozeß, in: Schriftenreihe des IDM 19, S. 57 - 63, Bielefeld 1979
(55)

Radatz, H.: Fehleranalysen im Mathematikunterricht, Braunschweig, 1980
(56, 58, 146, 147)

Roser, J.: Analyse von Schülerfehlern bei linearen Gleichungen im 7. und 8. Schuljahr, Zulassungsarbeit, Freiburg 1991
(64, 82, 90, 92, 97, 118, 140)

Sfard, A.: On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, in: Educational Studies in Mathematics, 22, S. 1 - 36, 1991
(78)

Sfard, A. : The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives, in: The Journal of Mathematical Behaviour 14, 1, S. 15 - 39, 1995
(78)

Shevarev, P.A.: An Experiment in the Psychological Analysis of Algebraic Errors ,Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. XII, University of Chicago 1975 (russisch-sprachiges

Original 1946), 1975
(71, 72)

Sommer, N.: Fehleranalyse als empirische Forschungsmethode der Mathematikdidaktik – Eine Untersuchung der Effekte des Unterrichts über nichtdezimale Stellenwertsysteme, Osnabrück 1982
(59)

Steinberg, R. / Sleeman, D. / Ktorza, D.: Algebra Students Knowledge of Equivalence of Equations in Journal for Research, in: Mathematical Education 22, 2, S. 112 - 121, 1990
(82 – 84)

Tandecki, L.: Entwicklung eines diagnostischen Systems zur kategorialen Erfassung von Fehlern beim algorithmischen Lösen algebraischer Aufgaben im Mathematikunterricht, Diplomarbeit, Braunschweig 1998
(120, 137)

Thorndike, E. L.: The Psychology of Algebra, New York, 1923
(75)

Tietze, U.-P.: Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik - Theoriebildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung , in: JMD 9, Heft 2/3 , S. 163 - 204, 1988
(58, 68, 71 – 74, 82, 89, 90, 94, 140)

Usiskin, Z.: Conceptions of School Algebra and Uses of Variables, in: Coxford, A. / Schulte, A. (eds.):The Ideas of Algebra, K-12, S. 8 - 19, Reston 1988
(74)

VanLehn, K.: Bugs are not enough: Empirical Studies of bugs, impasses, and repairs, in: Journal of Mathematical Behavior 3, 2, S. 3 - 71, 1982
(69)

VanLehn, K.: Mind Bugs: The Origins of Procedurale Misconceptions, Cambridge 1990
(69)

Vollrath, H. J.: Didaktik der Algebra, Stuttgart 1974
(7, 8, 10)

Vollrath, H. J.: Algebra in der Sekundarstufe, Mannheim 1994
(2, 7, 26 – 28, 36 – 43, 50, 74, 140)

Wäsche, H.: eine Vorbemerkung, in: MU 10 (5), 1964
(8, 33)

Wäsche, H.: Logische Begründung der Lehre von den Gleichungen und Ungleichungen, in: MU 10 (5), S. 7 - 58, 1964
(42)

Weidig, I: Gleichungslehre – Entwicklung und Tendenz, in: MU 40 (4), S. 26 - 42, 1994
(2, 41)

Wellenreuther, M.: Zur Methodologie der „Fehleranalyse“ in der mathematikdidaktischen Forschung, in: JMD 7, Heft 4 , S. 269 - 303, 1986
(57 – 60, 119)

Wolff, P.: Zur Didaktik der Gleichungslehre, in: Winter, H./Wittmann, E. (hrsg.): Beiträge zur Mathematikdidaktik, Festschrift für Wilhelm Oehl, S. 179 - 220, Hannover 1976
(8)

Schulbücher

Breidenbach Mathematik 8. Schuljahr, Lehrerausgabe (hrsg.: Breidenbach, W.), Westermann 1979
(11, 12, 13)

Breidenbach-Kielhorn 3 Mathematik für Mittel- und Realschulen Rechnen, Algebra, Geometrie für das 7. Schuljahr (hrsg.: Breidenbach, W./ Kielhorn, H.), Westermann 1963
(3, 4, 5)

Breidenbach-Kielhorn 4 Mathematik für Mittel- und Realschulen Rechnen, Algebra, Geometrie für das 8. Schuljahr (hrsg.: Breidenbach, W./ Kielhorn, H.), Westermann 1963
(6)

Hahn/Dzewas Mathematik Niedersachsen 7 (hrsg.: Cuckrowicz, J. / Dzewas, J.), Westermann 1989
(20, 21)

Hahn/Dzewas Mathematik Niedersachsen 8 (hrsg.: Cuckrowicz, J. / Dzewas, J.), Westermann 1990
(20, 21)

Lambacher Schweizer Algebra 1 (hrsg.: Schweizer, W.), Klett 1966
(9, 10)

Lambacher Schweizer Niedersachsen 7 (hrsg.: Schmid, A.), Klett 1993
(20, 21)

Lambacher Schweizer Niedersachsen 8 (hrsg.: Schmid, A.), Klett 1993
(13, 14, 20, 21)

Mathematik 7 Gesamtschule (Becker, O. / Klingen, C. u. a.), Westermann 1992
(20, 21)

Mathematik 8 Gesamtschule (Becker, O. / Klingen, C. u. a.), Westermann 1993
(20, 21)

Mathematik heute Gymnasium 7 Niedersachsen (hrsg.: Griesel, H. / Postel, H.), Schroedel 1990
(20, 21)

Mathematik heute Gymnasium 8 Niedersachsen (hrsg.: Griesel, H. / Postel, H.), Schroedel 1990
(20, 21)

Neues Mathematisches Arbeitsbuch 7 (Meyer, H.-G. / Unger, K.-H. /Vogler, M.), Diesterweg 1992
(20, 21)

Neues Mathematisches Arbeitsbuch 8 (Meyer, H.-G. / Unger, K.-H. /Vogler, M.), Diesterweg 1993
(20, 21)

Querschnitt Mathematik 7 Niedersachsen (hrsg.: Kahle, D. / Lörcher, G. A.), Westermann 1994
(48, 49)

Schröder Uchtmann Einführung in die Mathematik für allgemeinbildende Schulen Algebra 1 (hrsg.: Schröder, H. / Uchtmann, H.), Diesterweg 1968
(8, 9)

Welt und Zahl 7 (hrsg.: Schröder, M. / Wurl, B.), Schroedel 1993
(20, 21)

Welt und Zahl 8 (hrsg.: Schröder, M. / Wurl, B.), Schroedel 1993
(20, 21)

Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für die 3. Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen und Hauptschulen (in Österreich), (hrsg.: Reichel, H.-C. / Litschauer, D. / Groß, H.), Hölder-Pichler-Tempsky 1996
(47)

Auszüge aus Lehrplänen

Gymnasien

Lehrplaneinheit l: Lineare Funktionen und lineare Gleichungen *< 15 >*

Die Fähigkeit, funktionale Zusammenhänge zu erkennen, sie algebraisch zu fassen und graphisch darzustellen, wird am Beispiel linearer Beziehungen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler gewinnen Verständnis für Verfahren, lineare Gleichungen und Ungleichungen systematisch zu lösen, und wenden sie sicher an.

Das kartesische Koordinatensystem Die lineare Funktion und ihr Schaubild Lineare Gleichungen, lineare Ungleichungen mit einer Variablen, Äquivalenzumformungen	Rene Descartes (1596 -1650) ➔ Ph,LPE l: Einführung in die Physik Auch einfache Fälle mit variablen Koeffizienten

(...)

Lehrplaneinheit 3: Terme, Bruchterme, Bruchgleichungen *< 30>*

Die Schülerinnen und Schüler bewältigen jetzt auch schwierigere algebraische Aufgaben und komplexere Fragestellungen. Die Vertiefung und die Ausweitung der Methoden auf Bruchgleichungen erfordern intensives Üben sowie ausdauerndes und gewissenhaftes Arbeiten.

Termumformungen mit Hilfe der Klammerregeln und der binomischen Formeln [Binomische Formeln für n > 2, Pascalsches Dreieck] Faktorisieren von Termen Bruchterme und ihre Definitionsmengen Bruchgleichungen mit einer Variablen Äquivalenzumformungen Definitions- und Lösungsmengen [Einfache Bruchungleichungen ohne variable Koeffizienten]	Auch quadratisches Ergänzen

Lehrplanauszug 1: Bildungsplan für das Gymnasium Mathematik, Baden-Württemberg 1994, S. 283 f.

3 Lineare Gleichungen und Ungleichungen **(ca. 18 Std.)**

Mit Hilfe von Äquivalenzumformungen können Gleichungen und Ungleichungen jetzt systematisch gelöst werden. Die Schüler sollen darin Sicherheit gewinnen und sich eine Grundlage für effektives Arbeiten im Mathematikunterricht der Mittel- und Oberstufe erwerben. Die Bearbeitung von Sachaufgaben bereitet die Anwendung der Mathematik in natur- und gesellschaftswissenschaftlichen Fächern vor.

- Lösen linearer Gleichungen mit einer Unbekannten	Äquivalenz von Gleichungen
- Lösen linearer Ungleichungen mit einer Unbekannten	Äquivalenz von Ungleichungen
- Textaufgaben	Umsetzen von Texten in Gleichungen bzw. Ungleichungen, insbesondere bei Sachaufgaben; historische Beispiele ($\rightarrow$ G)

Lehrplanauszug 2: Lehrplan für das bayerische Gymnasium Fachlehrplan für die Jahrgangsstufe 7 für Mathematik 1991, S. 1200

Bei der *Gleichungslehre* ist es wichtig, das Vorwissen der Schüler in geeigneter Weise einzubeziehen: Es gilt, die Begriffe Gleichung, Ungleichung. Variable, Lösung bzw. Lösungsmenge auszuschärfen, ohne die durch mehr oder weniger reflektierten Umgang in den Klassen 5 bis 7 bereits erworbene Vertrautheit zu verschütten. Lösungsverfahren sollten nicht primär unter logischen Aspekten behandelt werden. Die Frage, ob bei einer Umformung die Lösungsmenge erhalten bleibt oder nicht, muß geklärt werden, es bleibt jedoch dem Lehrer überlassen, wo er den Begriff Äquivalenzumformung einführen will.

Lineare Gleichungen und Ungleichungen muß der Schüler sicher lösen können. Ebenso wichtig ist jedoch, daß er Anwendungssituationen, die auf solche Gleichungen oder Ungleichungen führen, analysieren kann, daß er sinnvolle Entscheidungen über den anzuwendenden Lösungsweg fällen und Rechenergebnisse situationsgerecht interpretieren kann. Es sollten auch solche Probleme behandelt werden, die auf einfache Bruchgleichungen oder Betragsungleichungen führen, die sich wiederum auf lineare Gleichungen bzw. Ungleichungen zurückführen lassen.

Lehrplanauszug 3: Lehrplan Mathematik Gymnasium Hamburg 1990, Klasse 8, S. 15

4 Terme, Termumformungen, Gleichungen, Ungleichungen

Ziele:
Die Schüler erlangen Sicherheit im Umformen von Termen und können die dazu geeigneten Umformungsschritte selbständig auswählen. Sie sind in der Lage, Gleichungen und Ungleichungen zu lösen sowie ihre Ergebnisse zu kontrollieren. Dabei sind sie zu einer selbständigen Entscheidung über den Lösungsweg anzuregen (algorithmisch-kalkülmäßig, inhaltlich, näherungsweises Lösen).
Den Schülern wird die Bedeutung der Arbeit mit Variablen und des Umformens von Termen für die Formulierung mathematischer Eigenschaften und Zusammenhänge aufgezeigt.

Verbindliche Inhalte	Hinweise
Struktur von Termen	
Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von Summen, Ausklammern - Binomische Formeln	*Zusatz:* Pascalsches Dreieck entdecken lassen - geometrische Veranschaulichungen
Gleichungen, Ungleichungen, äquivalente Gleichungen und Ungleichungen - Umformungsregeln für Gleichungen - Lösen von Gleichungen in verschiedenen Grundbereichen mit unterschiedlichen Methoden - Lösen einfacher linearer Ungleichungen	- auch systematisches Probieren, näherungsweises Lösen
Einfache Beweisführungen unter Verwendung von Variablen	
Nutzen von Gleichungen zur Lösung von Sachaufgaben	

Lehrplanauszug 4: Rahmenplan Gymnasium Mathematik Mecklenburg-Vorpommern 1997, Jahrgangsstufe 7/8, S. 24

2 Gleichungen und Ungleichungen I

ZRW: 10 Std.

Bemerkungen: Aus den Vorkenntnissen über das inhaltliche Lösen von Gleichungen aus den Schuljahrgängen 5/6 werden Regeln zum kalkülmäßigen Lösen von Gleichungen entwickelt.

Lernziele	**Verbindliche Inhalte**	**Hinweise zum Unterricht**
- Fähigkeit des inhaltlichen Lösens von Gleichungen und Ungleichungen	- inhaltliches Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	- Gleichungs- und Ungleichungstypen aus den Schuljahrgängen 5/6 erweitern, z. B.: $\|x\| = a$, $\|x\| \pm a = b$, $a \cdot \|x\| = b$ ($a, b \in Z$) $a \cdot \|x\| \pm b = c$, $a \pm \|x+b\| = c$, $a.x^n + b = c$
- Kenntnis der Regeln zum Lösen von Gleichungen	- Regeln zum Lösen von Gleichungen	- Nutzen der Erfahrungen beim Anwenden der Umkehroperation
- Beherrschung des Lösens von Gleichungen der Typen $ax + b = c$ $ax + b = cx + d$	- Lösen von Gleichungen der Typen $a \cdot x \pm b = c$, $a \cdot x + b = c \cdot x + d$	- Koeffizienten so wählen, daß die Rechenfertigkeiten im Bereich der rationalen Zahlen weiterentwickelt werden

Lehrplanauszug 5: Rahmenrichtlinien Gymnasium Mathematik des Landes Sachsen-Anhalt 1994 Schuljahrgänge 7/8 S. 41

Lernbereich 3: Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen **12 Std.**

Der Schüler kann bereits einfache Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen lösen. Die jeweiligen Einzelbetrachtungen werden nun durch eine Reihe immer wieder zu verwendender Regeln ersetzt. Mit diesen Umformungsregeln für Gleichungen werden Mittel zur Bewältigung auch komplizierterer Aufgaben bereitgestellt. Der Schüler lernt, Gleichungen mit Hilfe dieser Regeln zu lösen. Er erkennt, daß er die Umformungsregeln in modifizierter Form auch beim Lösen von Ungleichungen anwenden kann. Das Durchführen der Probe und das Angeben der Lösungsmenge gehören zum exakten Arbeiten mit Gleichungen. Verbindungen zum Lernbereich 2 werden dem Schüler bewußt.

Term, Gleichung, Ungleichung, Aussage, Aussageform, Variablengrundbereich, Lösung, Lösungsmenge	
Äquivalente Gleichungen Umformungsregeln für Gleichungen	Vielseitige Übungen, besonders von Gleichungen, die nach dem Zusammenfassen auf die Form ax + b = cx + d führen; auch von Verhältnisgleichungen Zweckmäßigkeit der Probe
Umformungsregeln für Ungleichungen	Probe für Zahlenbeispiele
Darstellen der Lösungsmenge von Ungleichungen auf der Zahlengeraden	Gedacht ist auch an die Form $x \leq a$ bzw. $x \geq a$.
Gleichungen und Ungleichungen mit Klammern	Distributivgesetz
Bruchgleichungen, die auf lineare Gleichungen führen	Dabei auch Umstellen von Formeln
Z *Betragsgleichungen* *Z Gleichungen mit Parametern* *Z Gleichungen vom Typ* $T_1 \cdot T_2 = 0$ *(T = Term)*	
Anwendungsaufgaben	*PH, Klasse 6, Lernbereich 2, Bewegungen

Lehrplanauszug 6: Lehrplan Gymnasium Mathematik Sachsen 1992
Klasse 7 S. 34

Real- und Sekundarschulen

4.5 Arbeitsbereich **ALGEBRA/FUNKTIONEN**

Grundlegende Begriffe der Mathematik wie Variable, Term (Funktionsterm), Gleichung (Funktionsgleichung), Ungleichung und Systeme von Gleichungen und Ungleichungen spielen in Wissenschaft, Wirtschaft und Technik sowie in Bildungsgängen der Sekundarstufe II eine bedeutende Rolle. An geeigneten innermathematischen und außermathematischen Beispielen müssen daher typische Merkmale und Methoden von Algebra und Funktionenlehre aufgezeigt werden, um die Lernenden zu befähigen, (mathematische) Informationen und Zusammenhänge übersichtlich darstellen zu können und adäquat zu verwenden. Alle Schülerinnen und Schüler sollen zum Formalisieren und Anwenden von Kalkülen angeleitet werden. Dabei sollen grundlegende Begriffe wie Variable, Term, Gleichung, Grundmenge, Lösungsmenge schrittweise eingeführt werden.

Rahmenthemen:
- Zuordnungen: Proportionale und antiproportionale
- Zuordnungen (vgl. GRÖSSEN)
- Lineare Gleichungen und Ungleichungen; ° Ganzrationale Terme
- ° Lineare Funktionen

LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN ;°GANZRATIONALE TERME

Themen: 1. Lineare Gleichungen/Ungleichungen mit einer Variablen

° 2. Terme und Gleichungen mit Klammern

Ziele:
- Gleichungen und ° Ungleichungen durch systematisches Probieren lösen
- Einfache lineare Gleichungen in Q^+ durch Umformen lösen
- Mit Formeln umgehen
- ° Ganzrationale Terme umformen
- ° Komplexere Gleichungen und Ungleichungen in Q lösen
- ° Zu Sachsituationen die zugehörigen Gleichungen (Ungleichungen) aufstellen und lösen

Den Nutzen algebraischer Methoden sollen die Schülerinnen und Schüler in der Anwendung erfahren. Mit Hilfe von Gleichungen und Ungleichungen werden Beziehungen zwischen Zahlen und zwischen Größen dargestellt; das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen spielt in Anwendungssituationen eine wichtige Rolle. Voraussetzung für einen sicheren Umgang mit Termen und Gleichungen ist die Einsicht in den Termaufbau und Kenntnis der verwandten Rechenregeln. Die bei diesem Rahmenthema erworbenen algebraischen Fertigkeiten müssen in der nachfolgenden Jahrgangsstufe 9/10 immer wieder aktiviert werden; dies führt langfristig zu besserem Erfolg als ausgedehntes Üben in dieser Jahrgangsstufe.

Lehrplanauszug 7: Rahmenplan Mathematik Sekundarstufe I Hessen 1995, S. 56

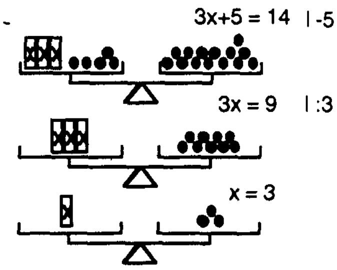
Hinweise zur Unterrichtsgestaltung		
Aspekte Lebenswelt-bezogenen Lernens	Numerische/Argumentative Aktivitäten	Handelnde/Zeichnerische Aktivitäten
	1. Lineare Gleichungen/Ungleichungen mit einer Variablen	
Zahlenrätsel, Knobelaufgaben aus Zeitschriften sammeln und Lösungsstrategien dafür entwickeln; Probleme, die auf Mischungsaufgaben, Bewegungsaufgaben und Aufgabenstellungen mit ökonomischem Sachverhalt führen, sammeln und lösen	Aus Sachsituationen lineare Gleichungen und Ungleichungen gewinnen und untersuchen; Lösen durch systematisches Probieren; Gleichungen umformen (in Q^+); Terme und Formeln umformen; lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen durch Äquivalenzumformungen lösen; zu konkreten Sachverhalten Terme bzw. Formeln aufstellen und vereinfachen	Umformungsschritte über Modelle veranschaulichen; geometrische Sachprobleme, die auf lineare Gleichungen führen, lösen (Sachverhalt skizzieren)
	2. Terme und Gleichungen mit Klammern	
Lösungsstrategien bei Zahlenrätsel oder Knobelaufgaben	Umformung von Termen mit Klammern; Lösen von Gleichungen; binomische Formeln als Sonderfälle von Termen mit Klammern einordnen; Ungleichungen; Produktgleichungen der Form $T_1 \cdot T_2 = 0$ mit linearen Termen T_1 und T_2 untersuchen	Umformungen von Termen mit Klammern als Flächeninhaltsproblem veranschaulichen; Produkte von Summen durch Quadrat- bzw. Rechtecksflächen veranschaulichen

Lehrplanauszug 8: Rahmenplan Mathematik Sekundarstufe I Hessen 1995, S. 57

2 Gleichungen

ZRW: 10 Std.

Bemerkung: Bei der Behandlung dieses Themas lernen die Schülerinnen und Schüler erstmals das kalkülmäßige Lösen von Gleichungen kennen. Bildhaft gegenständliches Vorgehen ist zu empfehlen.

Lernziele	Verbindliche Inhalte	Hinweise zum Unterricht
- Fähigkeit, einfache Gleichungen und Ungleichungen inhaltlich zu lösen	- Gleichungen (Ungleichungen) des Typs $ax = b$; $x \pm a = b$; $x/a = b$ und entsprechende Ungleichungen mit ganzen Zahlen als Koeffizienten werden inhaltlich gelöst - Veranschaulichungen	$\lvert x \rvert$ kann auch verwendet werden
- Fertigkeit des Anwendens der Umformungsregeln für $ax \pm b=c$	- Umformungsregeln zum Lösen von Gleichungen erkennen und formulieren - Gleichungen kalkülmäßig lösen - auch Dezimalzahlen verwenden - Kontrolle durch Probe	- Nutzung des Waagemodells, z. B.: - Beispiel $3x+5 = 14$  - auch einfache Brüche einbeziehen
- Fähigkeit des Lösens einfacher Anwendungsaufgaben	- Aufstellen von Gleichungen aus Text- und Anwendungsaufgaben - Kontrollen am Text	

Lehrplanauszug 9: Rahmenrichtlinien Sekundarschule Mathematik Sachsen-Anhalt 1994 Schuljahrgänge 7/8 S. 71

Lernbereich 3: Gleichungen **20 Std.**

Hauptanliegen des Lernbereichs ist die Entwicklung solider Fähigkeiten im kalkülmäßigen Lösen einfacher linearer Gleichungen. Der Schüler lernt Umformungsregeln für Gleichungen kennen und wendet diese sinnvoll beim rationellen Lösen an. Er soll zunehmend selbständig Aufgaben aus verschiedenen Sachbereichen mit Hilfe von Gleichungen lösen. Dabei muß er Sachverhalte durch Terme und Gleichungen ausdrücken, aber auch durch Skizzen oder andere Hilfen verdeutlichen.

Term, Berechnung von Termen	
Umformungsregeln für Gleichungen	Auf «zueinander äquivalente Gleichungen» kann hier verzichtet werden
Lösen von Gleichungen	
Unterschiedliche Typen formaler Aufgaben	→ MA, Klasse 8, Lernbereich 1, Lineare Gleichungen, (a x +b=c x+d) Auch Verhältnisgleichungen Isolieren der Variablen durch Anwenden der Umformungsregeln Verwenden von Zahlen aus allen bekannten Zahlenbereichen Notwendigkeit der Probe Aufstellen von Gleichungen aus Textaufgaben -Probe am Text
Z Inhaltliches Lösen von Ungleichungen	

Lehrplanauszug 10: Lehrplan Mittelschule Mathematik Realschulbildungsgang Sachsen 1992 Klasse 7 S. 42f.

Tests

Fragebogen zu den Tests 1997

Datum: __________ Schulstunde: ___________

Schule: ____

Schulform: Realschule __
Gymnasium __
Gesamtschule __

Klasse: ____________

Lehrer/in ____

Anzahl Schüler: _____

Anzahl Schülerinnen: _____

Anzahl ausländischer Schüler/innen: _____

Lehrerwechsel: ____

Wann Gleichungen behandelt: ____

Eingeführtes Schulbuch: ____

Lehrerspezifische Strategien: ____

____

____

____

Besonderes/weiteres: ____

____

____

____

Name: **Klasse:**

Übungsklausur A **Datum:**

$-8 + x = 7$	$-6x = 9$
$3x - 8 = 9x + 1$	$3x + 5 = -3x - 2$
$2x - 8 = -7x - 4$	$-7x - 7 = -8x - 5$

Name: **Klasse:**

A

$4x + 9 = 9x + 5$	$-6x + 8 = 8x - 8$
$8x + 5 = 6x + 7$	$-3x + 3 = -6x - 2$
$-7x + 4 = -6x + 5$	$8x + 9 = 0$

2

Name: **Klasse:**

A

$-9x-6=5x-4$	$x=5+4x$
$-3x+8=-2x-6$	$4x=9x$
$3000x+4000=2000x+6000$	$5x-5=2x-9$

Name: **Klasse:**

Übungsklausur B **Datum:**

$-8x - 5 = -7x - 7$	$-2x - 6 = -3x + 8$
$5x - 4 = -9x - 6$	$6x + 7 = 8x + 5$
$-7x - 4 = 2x - 8$	$9x + 1 = 3x - 8$

Name: **Klasse:**

B

$-6x-2=-3x+3$	$3000x+4000=2000x+6000$
$-6x+5=-7x+4$	$2x-9=5x-5$
$8x+9=0$	$9x+5=4x+9$

2

Name: **Klasse:**

B

$-3x - 2 = 3x + 5$	$x = 5 + 4x$
$8x - 8 = -6x + 8$	$4x = 9x$
$-8 + x = 7$	$-6x = 9$

Die folgenden Tabellen sind nicht zum Ausdrucken gedacht. Es handelt sich um die Tabellen aus 6.2.

				gesamt	Anzahl der Fehler je Aufgabe					
					0 Fehler	1 Fehler	2 Fehler	3 Fehler	4 Fehler	5 Fehler
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	441	365	52	22	2		
			-6x=9	441	213	201	22	5		
			3x-8=9x+1	441	219	164	48	9	1	
			3x+5=-3x-2	441	208	170	55	7		1
			2x-8=-7x-4	441	244	145	44	7	1	
			-7x-7=-8x-5	441	317	79	33	12		
			4x+9=9x+5	441	263	130	37	11		
			-6x+8=8x-8	441	230	160	39	12		
			8x+5=6x+7	441	323	91	20	7		
			-3x+3=-6x-2	441	223	170	36	10	2	
			-7x+4=-6x+5	441	299	111	25	6		
			8x+9=0	441	223	195	18	5		
			-9x-6=5x-4	441	210	170	46	14	1	
			x=5+4x	441	179	202	57	3		
			-3x+8=-2x-6	441	300	104	32	5		
			4x=9x	441	239	183	17	2		
			3000x+4000=2000x+6000	441	270	138	25	7	1	
			5x-5=2x-9	441	222	168	43	7	1	
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7	423	282	96	37	7	1	
			-2x-6=-3x+8	423	327	61	23	11	1	
			5x-4=-9x-6	423	202	176	37	6	2	
			6x+7=8x+5	423	299	80	40	3	1	
			-7x-4=2x-8	423	231	135	48	7	2	
			9x+1=3x-8	423	209	147	60	6	1	
			-6x-2=-3x+3	423	219	155	40	9		
			3000x+4000=2000x+6000	423	286	108	25	3	1	
			-6x+5=-7x+4	423	307	83	28	5		
			2x-9=5x-5	423	223	157	36	6	1	
			8x+9=0	423	242	161	19		1	
			9x+5=4x+9	423	276	118	22	6	1	
			-3x-2=3x+5	423	207	175	32	9		
			x=5+4x	423	197	173	50	3		
			8x-8=-6x+8	423	251	143	23	5	1	
			4x=9x	423	234	173	14	1	1	
			-8+x=7	423	371	44	8			
			-6x=9	423	219	195	8	1		
Gesamt	Anzahl			15552	9129	5013	1169	219	21	1

Tabelle 89: Verteilung der Anzahl der Fehler je Aufgabe
("nicht bearbeitet" wird bei "1 Fehler" mitgezählt)

				gesamt	1. Fehler in Zeile				
					1. Umformungszeile	2. Umformungszeile	3. Umformungszeile	4. Umformungszeile	5. Umformungszeile
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	76	64	8	4		
			-6x=9	228	200	25	3		
			3x-8=9x+1	222	78	64	67	12	1
			3x+5=-3x-2	233	81	62	80	7	3
			2x-8=-7x-4	197	66	50	74	7	
			-7x-7=-8x-5	124	66	34	21	3	
			4x+9=9x+5	178	61	44	67	5	1
			-6x+8=8x-8	211	78	53	73	6	1
			8x+5=6x+7	118	50	31	34	3	
			-3x+3=-6x-2	218	70	60	77	11	
			-7x+4=-6x+5	142	70	40	28	3	1
			8x+9=0	218	85	129	3	1	
			-9x-6=5x-4	231	69	58	92	11	1
			x=5+4x	262	172	71	19		
			-3x+8=-2x-6	141	75	42	22	2	
			4x=9x	202	159	36	7		
			3000x+4000=2000x+6000	171	76	30	63	2	
			5x-5=2x-9	219	82	52	78	7	
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7	141	71	43	25	2	
			-2x-6=-3x+8	96	56	30	8	2	
			5x-4=-9x-6	221	73	41	94	13	
			6x+7=8x+5	124	50	33	39	1	1
			-7x-4=2x-8	192	72	48	64	8	
			9x+1=3x-8	214	75	59	73	7	
			-6x-2=-3x+3	204	60	50	83	10	1
			3000x+4000=2000x+6000	137	54	26	53	4	
			-6x+5=-7x+4	116	61	37	18		
			2x-9=5x-5	200	63	46	80	10	1
			8x+9=0	181	81	95	5		
			9x+5=4x+9	147	58	35	50	4	
			-3x-2=3x+5	216	84	59	65	7	1
			x=5+4x	226	149	61	14	2	
			8x-8=-6x+8	172	60	39	65	7	1
			4x=9x	189	147	36	6		
			-8+x=7	52	49	2	1		
			-6x=9	204	183	20	1		
Gesamt	Anzahl			6423	3048	1649	1556	157	13

Tabelle 90: fehlerhafte Umformungen je Umformungszeile
(nur unter Berücksichtigung des ersten gemachten Fehlers)

				gesamt	Anzahl der Zeilen in der Aufgabe								
					0	1	2	3	4	5	6	7	8
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	441	1	2	298	115	21	4			
			-6x=9	441	10	2	267	125	28	8	1		
			3x-8=9x+1	441	7		13	94	212	93	18	2	2
			3x+5=-3x-2	441	8	5	18	117	226	53	14		
			2x-8=-7x-4	441	13	1	11	114	266	31	3		2
			-7x-7=-8x-5	441	15		83	191	132	16	4		
			4x+9=9x+5	441	12	2	10	112	258	41	6		
			-6x+8=8x-8	441	11	1	15	103	206	84	18	3	
			8x+5=6x+7	441	16		11	113	275	25		1	
			-3x+3=-6x-2	441	17	1	14	97	259	49	4		
			-7x+4=-6x+5	441	22		38	180	181	19	1		
			8x+9=0	441	22	4	34	322	57	2			
			-9x-6=5x-4	441	19		10	91	237	77	7		
			x=5+4x	441	26	6	23	270	98	15	3		
			-3x+8=-2x-6	441	22		47	180	172	17	3		
			4x=9x	441	61	36	114	202	22	6			
			3000x+4000=2000x+6000	441	31	2	18	95	266	24	5		
			5x-5=2x-9	441	28		8	113	241	50	1		
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7	423	5	2	27	151	207	28	3		
			-2x-6=-3x+8	423	4		61	215	128	14	1		
			5x-4=-9x-6	423	7	1	6	104	241	55	8		1
			6x+7=8x+5	423	4	2	4	99	274	35	5		
			-7x-4=2x-8	423	7		5	107	242	59	2	1	
			9x+1=3x-8	423	8		4	96	230	68	17		
			-6x-2=-3x+3	423	6		4	97	246	64	5	1	
			3000x+4000=2000x+6000	423	9		8	82	287	30	6	1	
			-6x+5=-7x+4	423	8		59	211	133	10	1	1	
			2x-9=5x-5	423	10		6	104	234	61	8		
			8x+9=0	423	16	2	32	307	64	2			
			9x+5=4x+9	423	14		5	104	267	33			
			-3x-2=3x+5	423	13	4	20	114	209	58	5		
			x=5+4x	423	23	1	27	252	101	17	2		
			8x-8=-6x+8	423	10	1	10	98	228	62	14		
			4x=9x	423	54	42	112	189	21	4		1	
			-8+x=7	423	13		362	36	10	2			
			-6x=9	423	26	4	265	95	28	5			
Gesamt	Anzahl			15552	578	121	2049	5095	6307	1221	165	11	5

Tabelle 91: Anzahl der Umformungsschritte (Anzahl der Zeilen) je Aufgabe
(1. Umformungsschritt entspricht der 2. Zeile)

				gesamt	Fehler im Umformungsschritt							
					erste Umformung		mittlere Umformung		letzte Umformung		nur eine Umformung	
				Anzahl	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	99	32	32,3%	8	8,1%	30	30,3%	29	29,3%
			-6x=9	247	56	22,7%	18	7,3%	42	17,0%	131	53,0%
			3x-8=9x+1	276	64	23,2%	79	28,6%	126	45,7%	7	2,5%
			3x+5=-3x-2	277	52	18,8%	62	22,4%	147	53,1%	16	5,8%
			2x-8=-7x-4	226	43	19,0%	51	22,6%	125	55,3%	7	3,1%
			-7x-7=-8x-5	166	40	24,1%	42	25,3%	73	44,0%	11	6,6%
			4x+9=9x+5	209	41	19,6%	48	23,0%	114	54,5%	6	2,9%
			-6x+8=8x-8	236	56	23,7%	59	25,0%	111	47,0%	10	4,2%
			8x+5=6x+7	131	27	20,6%	31	23,7%	68	51,9%	5	3,8%
			-3x+3=-6x-2	256	47	18,4%	63	24,6%	141	55,1%	5	2,0%
			-7x+4=-6x+5	157	37	23,6%	33	21,0%	76	48,4%	11	7,0%
			8x+9=0	201	43	21,4%	14	7,0%	129	64,2%	15	7,5%
			-9x-6=5x-4	276	43	15,6%	60	21,7%	166	60,1%	7	2,5%
			x=5+4x	282	123	43,6%	28	9,9%	114	40,4%	17	6,0%
			-3x+8=-2x-6	161	39	24,2%	37	23,0%	71	44,1%	14	8,7%
			4x=9x	126	19	15,1%	11	8,7%	53	42,1%	43	34,1%
			3000x+4000=2000x+6000	180	33	18,3%	27	15,0%	110	61,1%	10	5,6%
			5x-5=2x-9	238	50	21,0%	47	19,7%	137	57,6%	4	1,7%
		Gesamt		3744	845	11,9%	718	10,1%	1833	25,7%	348	4,9%
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7	188	54	28,7%	40	21,3%	84	44,7%	10	5,3%
			-2x-6=-3x+8	140	49	35,0%	31	22,1%	57	40,7%	3	2,1%
			5x-4=-9x-6	256	60	23,4%	49	19,1%	145	56,6%	2	,8%
			6x+7=8x+5	165	41	24,8%	39	23,6%	82	49,7%	3	1,8%
			-7x-4=2x-8	235	58	24,7%	53	22,6%	121	51,5%	3	1,3%
			9x+1=3x-8	278	63	22,7%	79	28,4%	132	47,5%	4	1,4%
			-6x-2=-3x+3	249	52	20,9%	49	19,7%	145	58,2%	3	1,2%
			3000x+4000=2000x+6000	162	39	24,1%	32	19,8%	85	52,5%	6	3,7%
			-6x+5=-7x+4	145	48	33,1%	27	18,6%	65	44,8%	5	3,4%
			2x-9=5x-5	229	49	21,4%	52	22,7%	124	54,1%	4	1,7%
			8x+9=0	171	45	26,3%	5	2,9%	103	60,2%	18	10,5%
			9x+5=4x+9	168	40	23,8%	37	22,0%	87	51,8%	4	2,4%
			-3x-2=3x+5	236	49	20,8%	46	19,5%	123	52,1%	18	7,6%
			x=5+4x	249	106	42,6%	19	7,6%	105	42,2%	19	7,6%
			8x-8=-6x+8	172	40	23,3%	42	24,4%	83	48,3%	7	4,1%
			4x=9x	112	20	17,9%	7	6,3%	54	48,2%	31	27,7%
			-8+x=7	47	11	23,4%	1	2,1%	10	21,3%	25	53,2%
			-6x=9	184	26	14,1%	4	2,2%	27	14,7%	127	69,0%
		Gesamt		3386	850	11,9%	612	8,6%	1632	22,9%	292	4,1%

Tabelle 92: fehlerhafte Umformungen je Umformungsschritt
(alle fehlerhaften Umformungen werden berücksichtigt)

			Fehler im Umformungsschritt				Gesamt
			erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung	nur eine Umformung	
	richtige Umformung	Anzahl	11116	7989	9468	1409	29982
		% der Gesamtzahl	30,0%	21,5%	25,5%	3,8%	80,8%
	falsche Umformung	Anzahl	1695	1330	3465	640	7130
		% der Gesamtzahl	4,6%	3,6%	9,3%	1,7%	19,2%
Gesamt		Anzahl	12811	9319	12933	2049	37112
		% der Gesamtzahl	34,5%	25,1%	34,8%	5,5%	100,0%

Tabelle 93: Kreuztabelle: falsche Umformung - Fehler im Umformungsschritt

			Fehler im Umformungsschritt			Gesamt
			erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung	
	richtige Umformung	Anzahl	11116	7989	9468	28573
		% der Gesamtzahl	31,7%	22,8%	27,0%	81,5%
	falsche Umformung	Anzahl	1695	1330	3465	6490
		% der Gesamtzahl	4,8%	3,8%	9,9%	18,5%
Gesamt[a]		Anzahl	12811	9319	12933	35063
		% der Gesamtzahl	36,5%	26,6%	36,9%	100,0%

a. chi-quadrat = 936 df =2

Tabelle 94: Kreuztabelle: falsche Umformung - Fehler im Umformungsschritt
(nur unter Beachtung der Fälle mit mehr als einer Umformung)

				gesamt	Aufgabe richtig gelöst		1. Fehler im Umformungsschritt				
				Anzahl	Nein	Ja	erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung	keine Umformung	nur eine Umformung
					Anzahl	Anzahl	Anzahl	Anzahl	Anzahl	Anzahl	Anzahl
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	441	77	364	32	6	6	3	30
			-6x=9	441	232	209	58	10	18	12	134
			3x-8=9x+1	441	243	198	79	61	83	7	13
			3x+5=-3x-2	441	253	188	70	46	106	13	18
			2x-8=-7x-4	441	218	223	63	36	95	14	10
			-7x-7=-8x-5	441	131	310	45	24	34	15	13
			4x+9=9x+5	441	197	244	57	36	81	14	9
			-6x+8=8x-8	441	236	205	77	41	92	12	14
			8x+5=6x+7	441	126	315	34	19	49	16	8
			-3x+3=-6x-2	441	238	203	60	45	103	18	12
			-7x+4=-6x+5	441	146	295	40	25	47	22	12
			8x+9=0	441	235	206	49	9	124	26	27
			-9x-6=5x-4	441	245	196	55	43	119	19	9
			x=5+4x	441	269	172	126	20	70	32	21
			-3x+8=-2x-6	441	147	294	43	29	37	22	16
			4x=9x	441	274	167	32	8	35	97	102
			3000x+4000=2000x+6000	441	178	263	38	12	83	33	12
			5x-5=2x-9	441	240	201	69	34	103	28	6
		Gesamt		7938	3685	4253	1027	504	1285	403	466
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7	423	145	278	57	28	42	7	11
			-2x-6=-3x+8	423	103	320	53	16	24	4	6
			5x-4=-9x-6	423	242	181	80	35	113	8	6
			6x+7=8x+5	423	134	289	51	29	45	6	3
			-7x-4=2x-8	423	213	210	81	40	80	7	5
			9x+1=3x-8	423	225	198	74	59	80	8	4
			-6x-2=-3x+3	423	218	205	64	40	104	6	4
			3000x+4000=2000x+6000	423	145	278	46	19	64	9	7
			-6x+5=-7x+4	423	118	305	49	18	37	8	6
			2x-9=5x-5	423	219	204	66	39	98	10	6
			8x+9=0	423	195	228	50	2	98	18	27
			9x+5=4x+9	423	161	262	54	24	65	14	4
			-3x-2=3x+5	423	230	193	61	32	100	17	20
			x=5+4x	423	239	184	112	12	65	24	26
			8x-8=-6x+8	423	199	224	67	30	82	11	9
			4x=9x	423	272	151	31	4	38	96	103
			-8+x=7	423	52	371	11	1	2	13	25
			-6x=9	423	210	213	27	3	18	30	132
		Gesamt		7614	3320	4294	1034	431	1155	296	404

Tabelle 95: Verteilung der Fehler je Umformungsschritt
(nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

				1. Fehler im Umformungsschritt				
				erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung	keine Umformung	nur eine Umformung
				Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	41,6%	7,8%	7,8%	3,9%	39,0%
			-6x=9	25,0%	4,3%	7,8%	5,2%	57,8%
			3x-8=9x+1	32,5%	25,1%	34,2%	2,9%	5,3%
			3x+5=-3x-2	27,7%	18,2%	41,9%	5,1%	7,1%
			2x-8=-7x-4	28,9%	16,5%	43,6%	6,4%	4,6%
			-7x-7=-8x-5	34,4%	18,3%	26,0%	11,5%	9,9%
			4x+9=9x+5	28,9%	18,3%	41,1%	7,1%	4,6%
			-6x+8=8x-8	32,6%	17,4%	39,0%	5,1%	5,9%
			8x+5=6x+7	27,0%	15,1%	38,9%	12,7%	6,3%
			-3x+3=-6x-2	25,2%	18,9%	43,3%	7,6%	5,0%
			-7x+4=-6x+5	27,4%	17,1%	32,2%	15,1%	8,2%
			8x+9=0	20,9%	3,8%	52,8%	11,1%	11,5%
			-9x-6=5x-4	22,4%	17,6%	48,6%	7,8%	3,7%
			x=5+4x	46,8%	7,4%	26,0%	11,9%	7,8%
			-3x+8=-2x-6	29,3%	19,7%	25,2%	15,0%	10,9%
			4x=9x	11,7%	2,9%	12,8%	35,4%	37,2%
			3000x+4000=2000x+6000	21,3%	6,7%	46,6%	18,5%	6,7%
			5x-5=2x-9	28,8%	14,2%	42,9%	11,7%	2,5%
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7	39,3%	19,3%	29,0%	4,8%	7,6%
			-2x-6=-3x+8	51,5%	15,5%	23,3%	3,9%	5,8%
			5x-4=-9x-6	33,1%	14,5%	46,7%	3,3%	2,5%
			6x+7=8x+5	38,1%	21,6%	33,6%	4,5%	2,2%
			-7x-4=2x-8	38,0%	18,8%	37,6%	3,3%	2,3%
			9x+1=3x-8	32,9%	26,2%	35,6%	3,6%	1,8%
			-6x-2=-3x+3	29,4%	18,3%	47,7%	2,8%	1,8%
			3000x+4000=2000x+6000	31,7%	13,1%	44,1%	6,2%	4,8%
			-6x+5=-7x+4	41,5%	15,3%	31,4%	6,8%	5,1%
			2x-9=5x-5	30,1%	17,8%	44,7%	4,6%	2,7%
			8x+9=0	25,6%	1,0%	50,3%	9,2%	13,8%
			9x+5=4x+9	33,5%	14,9%	40,4%	8,7%	2,5%
			-3x-2=3x+5	26,5%	13,9%	43,5%	7,4%	8,7%
			x=5+4x	46,9%	5,0%	27,2%	10,0%	10,9%
			8x-8=-6x+8	33,7%	15,1%	41,2%	5,5%	4,5%
			4x=9x	11,4%	1,5%	14,0%	35,3%	37,9%
			-8+x=7	21,2%	1,9%	3,8%	25,0%	48,1%
			-6x=9	12,9%	1,4%	8,6%	14,3%	62,9%

Tabelle 96: prozentuale Verteilung der Fehler je Umformungsschritt
(nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

				gesamt	Aufgabe richtig gelöst	1. Fehler im Umformungsschritt		
				Anzahl	Nein	erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung
					Anzahl	Anzahl	Anzahl	Anzahl
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	44	44	32	6	6
			-6x=9	86	86	58	10	18
			3x-8=9x+1	223	223	79	61	83
			3x+5=-3x-2	222	222	70	46	106
			2x-8=-7x-4	194	194	63	36	95
			-7x-7=-8x-5	103	103	45	24	34
			4x+9=9x+5	174	174	57	36	81
			-6x+8=8x-8	210	210	77	41	92
			8x+5=6x+7	102	102	34	19	49
			-3x+3=-6x-2	208	208	60	45	103
			-7x+4=-6x+5	112	112	40	25	47
			8x+9=0	182	182	49	9	124
			-9x-6=5x-4	217	217	55	43	119
			x=5+4x	216	216	126	20	70
			-3x+8=-2x-6	109	109	43	29	37
			4x=9x	75	75	32	8	35
			3000x+4000=2000x+6000	133	133	38	12	83
			5x-5=2x-9	206	206	69	34	103
		Gesamt		2816	2816	1027	504	1285
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7	127	127	57	28	42
			-2x-6=-3x+8	93	93	53	16	24
			5x-4=-9x-6	228	228	80	35	113
			6x+7=8x+5	125	125	51	29	45
			-7x-4=2x-8	201	201	81	40	80
			9x+1=3x-8	213	213	74	59	80
			-6x-2=-3x+3	208	208	64	40	104
			3000x+4000=2000x+6000	129	129	46	19	64
			-6x+5=-7x+4	104	104	49	18	37
			2x-9=5x-5	203	203	66	39	98
			8x+9=0	150	150	50	2	98
			9x+5=4x+9	143	143	54	24	65
			-3x-2=3x+5	193	193	61	32	100
			x=5+4x	189	189	112	12	65
			8x-8=-6x+8	179	179	67	30	82
			4x=9x	73	73	31	4	38
			-8+x=7	14	14	11	1	2
			-6x=9	48	48	27	3	18
		Gesamt		2620	2620	1034	431	1155

Tabelle 97: Verteilung der Fehler je Umformungsschritt
(nur unter Beachtung des ersten Fehlers und mehr als einer durchgeführten Umformung)

				1. Fehler im Umformungsschritt		
				erste Umformung	mittlere Umformung	letzte Umformung
				Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent	Anzahl in Prozent
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	72,7%	13,6%	13,6%
			-6x=9	67,4%	11,6%	20,9%
			3x-8=9x+1	35,4%	27,4%	37,2%
			3x+5=-3x-2	31,5%	20,7%	47,7%
			2x-8=-7x-4	32,5%	18,6%	49,0%
			-7x-7=-8x-5	43,7%	23,3%	33,0%
			4x+9=9x+5	32,8%	20,7%	46,6%
			-6x+8=8x-8	36,7%	19,5%	43,8%
			8x+5=6x+7	33,3%	18,6%	48,0%
			-3x+3=-6x-2	28,8%	21,6%	49,5%
			-7x+4=-6x+5	35,7%	22,3%	42,0%
			8x+9=0	26,9%	4,9%	68,1%
			-9x-6=5x-4	25,3%	19,8%	54,8%
			x=5+4x	58,3%	9,3%	32,4%
			-3x+8=-2x-6	39,4%	26,6%	33,9%
			4x=9x	42,7%	10,7%	46,7%
			3000x+4000=2000x+6000	28,6%	9,0%	62,4%
			5x-5=2x-9	33,5%	16,5%	50,0%
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7	44,9%	22,0%	33,1%
			-2x-6=-3x+8	57,0%	17,2%	25,8%
			5x-4=-9x-6	35,1%	15,4%	49,6%
			6x+7=8x+5	40,8%	23,2%	36,0%
			-7x-4=2x-8	40,3%	19,9%	39,8%
			9x+1=3x-8	34,7%	27,7%	37,6%
			-6x-2=-3x+3	30,8%	19,2%	50,0%
			3000x+4000=2000x+6000	35,7%	14,7%	49,6%
			-6x+5=-7x+4	47,1%	17,3%	35,6%
			2x-9=5x-5	32,5%	19,2%	48,3%
			8x+9=0	33,3%	1,3%	65,3%
			9x+5=4x+9	37,8%	16,8%	45,5%
			-3x-2=3x+5	31,6%	16,6%	51,8%
			x=5+4x	59,3%	6,3%	34,4%
			8x-8=-6x+8	37,4%	16,8%	45,8%
			4x=9x	42,5%	5,5%	52,1%
			-8+x=7	78,6%	7,1%	14,3%
			-6x=9	56,3%	6,3%	37,5%

Tabelle 98: prozentuale Verteilung der Fehler je Umformungsschritt
(nur unter Beachtung des ersten Fehlers und mehr als einer durchgeführten Umformung)

Aufgabe richtig gelöst

		Gruppierung der Aufgaben (rel. Häufigk.)		
		leicht	mittel	schwer
Aufgabe	-8+x=7	,88	,	,
	-8+x=7	,83	,	,
	-2x-6=-3x+8	,76	,	,
	-6x+5=-7x+4	,72	,	,
	8x+5=6x+7	,71	,	,
	-7x-7=-8x-5	,70	,	,
	6x+7=8x+5	,68	,	,
	-7x+4=-6x+5	,67	,	,
	-3x+8=-2x-6	,67	,	,
	-8x-5=-7x-7	,	,66	,
	3000x+4000=2000x+6000	,	,66	,
	9x+5=4x+9	,	,62	,
	3000x+4000=2000x+6000	,	,60	,
	4x+9=9x+5	,	,55	,
	8x+9=0	,	,54	,
	8x-8=-6x+8	,	,53	,
	2x-8=-7x-4	,	,51	,
	-6x=9	,	,50	,
	-7x-4=2x-8	,	,50	,
	-6x-2=-3x+3	,	,48	,
	2x-9=5x-5	,	,48	,
	-6x=9	,	,47	,
	9x+1=3x-8	,	,47	,
	8x+9=0	,	,47	,
	-6x+8=8x-8	,	,46	,
	-3x+3=-6x-2	,	,46	,
	-3x-2=3x+5	,	,	,46
	5x-5=2x-9	,	,46	,
	3x-8=9x+1	,	,	,45
	-9x-6=5x-4	,	,	,44
	x=5+4x	,	,	,43
	5x-4=-9x-6	,	,	,43
	3x+5=-3x-2	,	,	,43
	x=5+4x	,	,	,39
	4x=9x	,	,	,38
	4x=9x	,	,	,36

Tabelle 99: Gruppierung der Aufgaben nach Lösungserfolg

				Gruppierung der Aufgaben (absolute Häufigkeiten)		
				leicht	mittel	schwer
Testversion	Test A	Aufgabe	-8+x=7	441		
			-6x=9		441	
			3x-8=9x+1			441
			3x+5=-3x-2			441
			2x-8=-7x-4		441	
			-7x-7=-8x-5	441		
			4x+9=9x+5		441	
			-6x+8=8x-8		441	
			8x+5=6x+7	441		
			-3x+3=-6x-2		441	
			-7x+4=-6x+5	441		
			8x+9=0		441	
			-9x-6=5x-4			441
			x=5+4x			441
			-3x+8=-2x-6	441		
			4x=9x			441
			3000x+4000=2000x+6000		441	
			5x-5=2x-9		441	
	Test B	Aufgabe	-8x-5=-7x-7		423	
			-2x-6=-3x+8	423		
			5x-4=-9x-6			423
			6x+7=8x+5	423		
			-7x-4=2x-8		423	
			9x+1=3x-8		423	
			-6x-2=-3x+3		423	
			3000x+4000=2000x+6000		423	
			-6x+5=-7x+4	423		
			2x-9=5x-5		423	
			8x+9=0		423	
			9x+5=4x+9		423	
			-3x-2=3x+5			423
			x=5+4x			423
			8x-8=-6x+8		423	
			4x=9x			423
			-8+x=7	423		
			-6x=9		423	

Tabelle 100: Gruppierung der Aufgaben nach Schwierigkeit

		Gruppierung der Aufgaben		
		leicht	mittel	schwer
Test	A	2205	3528	2205
	B	1692	4230	1692
Gesamt		3897	7758	3897

Tabelle 101: Gruppierung nach Schwierigkeit

Gruppierung der Aufgaben			Gesamtanzahl falsch	1. Fehler im Umformungsschritt					
				erste Umformung		mittlere Umformung		letzte Umformung	
			Anzahl	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
leicht	Aufgabe	-8+x=7	44	32	72,7%	6	13,6%	6	13,6%
		-7x-7=-8x-5	103	45	43,7%	24	23,3%	34	33,0%
		8x+5=6x+7	102	34	33,3%	19	18,6%	49	48,0%
		-7x+4=-6x+5	112	40	35,7%	25	22,3%	47	42,0%
		-3x+8=-2x-6	109	43	39,4%	29	26,6%	37	33,9%
		-2x-6=-3x+8	93	53	57,0%	16	17,2%	24	25,8%
		6x+7=8x+5	125	51	40,8%	29	23,2%	45	36,0%
		-6x+5=-7x+4	104	49	47,1%	18	17,3%	37	35,6%
		-8+x=7	14	11	78,6%	1	7,1%	2	14,3%
	Gesamt		806	358	44,4%	167	20,7%	281	34,9%
mittel	Aufgabe	-6x=9	86	58	67,4%	10	11,6%	18	20,9%
		2x-8=-7x-4	194	63	32,5%	36	18,6%	95	49,0%
		4x+9=9x+5	174	57	32,8%	36	20,7%	81	46,6%
		-6x+8=8x-8	210	77	36,7%	41	19,5%	92	43,8%
		-3x+3=-6x-2	208	60	28,8%	45	21,6%	103	49,5%
		8x+9=0	182	49	26,9%	9	4,9%	124	68,1%
		3000x+4000=2000x+6000	133	38	28,6%	12	9,0%	83	62,4%
		5x-5=2x-9	206	69	33,5%	34	16,5%	103	50,0%
		-8x-5=-7x-7	127	57	44,9%	28	22,0%	42	33,1%
		-7x-4=2x-8	201	81	40,3%	40	19,9%	80	39,8%
		9x+1=3x-8	213	74	34,7%	59	27,7%	80	37,6%
		-6x-2=-3x+3	208	64	30,8%	40	19,2%	104	50,0%
		3000x+4000=2000x+6000	129	46	35,7%	19	14,7%	64	49,6%
		2x-9=5x-5	203	66	32,5%	39	19,2%	98	48,3%
		8x+9=0	150	50	33,3%	2	1,3%	98	65,3%
		9x+5=4x+9	143	54	37,8%	24	16,8%	65	45,5%
		8x-8=-6x+8	179	67	37,4%	30	16,8%	82	45,8%
		-6x=9	48	27	56,3%	3	6,3%	18	37,5%
	Gesamt		2994	1057	35,3%	507	16,9%	1430	47,8%
schwer	Aufgabe	3x-8=9x+1	223	79	35,4%	61	27,4%	83	37,2%
		3x+5=-3x-2	222	70	31,5%	46	20,7%	106	47,7%
		-9x-6=5x-4	217	55	25,3%	43	19,8%	119	54,8%
		x=5+4x	216	126	58,3%	20	9,3%	70	32,4%
		4x=9x	75	32	42,7%	8	10,7%	35	46,7%
		5x-4=-9x-6	228	80	35,1%	35	15,4%	113	49,6%
		-3x-2=3x+5	193	61	31,6%	32	16,6%	100	51,8%
		x=5+4x	189	112	59,3%	12	6,3%	65	34,4%
		4x=9x	73	31	42,5%	4	5,5%	38	52,1%
	Gesamt		1636	646	39,5%	261	16,0%	729	44,6%

Tabelle 102: Verteilung der Fehler je Umformungsschritt mit Gruppierung der Aufgaben
(nur unter Beachtung des ersten Fehlers und mehr als einer durchgeführten Umformung)

		gesamt	Anzahl der Fehler je Aufgabe																								
			0 Fehler bei 1 Umfor-mung	1 Fehler bei 1 Umfor-mung	0 Fehler bei 2 Umfor-mungen	1 Fehler bei 2 Umfor-mungen	2 Fehler bei 2 Umfor-mungen	0 Fehler bei 3 Umfor-mungen	1 Fehler bei 3 Umfor-mungen	2 Fehler bei 3 Umfor-mungen	3 Fehler bei 3 Umfor-mungen	0 Fehler bei 4 Umfor-mungen	1 Fehler bei 4 Umfor-mungen	2 Fehler bei 4 Umfor-mungen	3 Fehler bei 4 Umfor-mungen	4 Fehler bei 4 Umfor-mungen	0 Fehler bei 5 Umfor-mungen	1 Fehler bei 5 Umfor-mungen	2 Fehler bei 5 Umfor-mungen	3 Fehler bei 5 Umfor-mungen	4 Fehler bei 5 Umfor-mungen	5 Fehler bei 5 Umfor-mungen	0 Fehler bei 6 Umfor-mungen	2 Fehler bei 6 Umfor-mungen	3 Fehler bei 6 Umfor-mungen	0 Fehler bei 7 Umfor-mungen	3 Fehler bei 7 Umfor-mungen
Test A	-8+x=7	438	269	29	84	12	19	10	6	3	2	2	2														
	-6x=9	429	135	132	61	50	14	12	7	6	3	5		1	2				1								
	3x-8=9x+1	434	6	7	51	37	6	101	80	26	5	48	30	11	3	1	10	3	5				2			1	1
	3x+5=-3x-2	428	2	16	65	38	14	111	86	27	2	26	11	12	4		4	6	2	1		1					
	2x-8=-7x-4	427	4	7	76	30	8	149	85	27	5	13	9	7	1	1			2	1						2	
	-7x-7=-8x-5	426	72	11	161	18	12	75	30	17	10	8	4	2	2		1	1	2								
	4x+9=9x+5	427	4	6	84	23	5	149	75	25	9	24	10	5	2		2	2	2								
	-6x+8=8x-8	429	5	10	55	33	15	96	87	16	7	60	15	4	5		11	3	4				3				
	8x+5=6x+7	425	6	5	89	20	4	215	45	12	3	13	5	4	3										1		
	-3x+3=-6x-2	423	9	5	58	32	7	125	101	26	7	30	12	2	3	2	1	2	1								
	-7x+4=-6x+5	419	27	11	143	33	4	120	38	19	4	9	6	2	2			1									
	8x+9=0	415	18	16	170	140	12	34	12	6	5	1	1														
	-9x-6=5x-4	422	3	7	54	30	7	97	98	32	10	53	15	4	4	1	3	1	3								
	x=5+4x	409	6	17	115	118	37	45	34	17	2	10	1	3	1		3										
	-3x+8=-2x-6	419	33	14	145	32	3	110	33	25	4	11	2	3	1		1	1	1								
	4x=9x	344	71	43	156	35	11	9	6	5	2	3	2	1													
	3000x+4000=2000x+6000	408	8	10	62	26	7	181	66	16	3	17	2	2	3		2	1		1	1						
	5x-5=2x-9	413	4	4	69	36	8	114	92	31	4	34	8	4	3	1	1										
Test B	-8x-5=-7x-7	417	17	10	102	34	15	143	40	20	5	20	5	1	2		1		1		1						
	-2x-6=-3x+8	420	58	3	184	24	8	84	23	13	8	2	6	2	3	1		1									
	5x-4=-9x-6	416	4	2	64	28	12	102	117	17	6	26	22	6		1	5		2		1					1	
	6x+7=8x+5	418	1	3	75	10	14	196	55	21	3	27	3	4		1	1	3	1								
	-7x-4=2x-8	417	2	3	62	26	19	131	85	22	5	34	14	7	2	2	1	1					1				
	9x+1=3x-8	416		4	52	26	18	111	85	30	5	36	21	10	1		11	3	2		1						
	-6x-2=-3x+3	418	1	3	60	30	7	115	98	28	6	40	17	6	1		2	1		2			1				
	3000x+4000=2000x+6000	414	2	6	58	16	8	205	68	11	3	16	9	4		1	5		1					1			
	-6x+5=-7x+4	415	54	5	166	34	11	81	32	16	4	4	4	1	1		1						1				
	2x-9=5x-5	413	2	4	66	28	10	113	97	21	3	37	16	5	3		5	2			1						
	8x+9=0	405	14	18	178	117	12	49	8	7		1				1											
	9x+5=4x+9	409	1	4	74	23	7	185	66	12	4	16	11	3	2	1											
	-3x-2=3x+5	406	2	18	56	51	7	114	71	18	6	32	17	6	3		3	1	1								
	x=5+4x	399	8	19	119	95	38	57	30	12	2	12	4		1		1	1									
	8x-8=-6x+8	412	3	7	67	22	9	127	86	12	3	42	15	2	2	1	12	2									
	4x=9x	327	81	31	140	38	11	11	7	3		1	1		1	1							1				
	-8+x=7	410	337	25	24	5	7	8	1	1		2															
	-6x=9	393	138	127	55	32	8	22	5		1	4	1														
	Anzahl	14860	1407	642	3300	1382	414	3607	1955	600	151	719	301	124	61	16	87	36	31	5	5	1	9	1	1	4	1

Tabelle 103: Fehler in Abhängigkeit vom Umformungsschritt und der Anzahl der Umformungsschritte

				Fehlerart											
		Fehler	erkannte Fehler	Vorzeichen falsch	Vertau-schung von Addition und Subtraktion	Vertau-schung von Multiplika-tion und Division	Kehrwert gebildet	Vertau-schung von Addition und Division	Vertau-schung von x-Term mit Konstante	Rechen-fehler	nur eine Seite umgeformt	Bearbei-tung abge-brochen	Aufgabe nicht bearbeitet	weiterer alge-braischer Fehler	Syntax verletzt
Test A	-8+x=7	76	60	7	16					3	9	3	1	5	23
	-6x=9	228	224	61	5	5	8	98	2	20	13	7	10	1	12
	3x-8=9x+1	222	199	64	39	3	11	16	2	16	22	5	7	15	20
	3x+5=-3x-2	233	213	74	50	2	12	14	1	30	16	9	8	3	18
	2x-8=-7x-4	197	176	26	30	2	22	10	1	37	10	10	13	10	15
	-7x-7=-8x-5	124	106	28	21		2	11		11	10		15	5	12
	4x+9=9x+5	178	167	23	20	1	14	15	2	38	13	13	12	11	11
	-6x+8=8x-8	211	187	28	46		13	13	4	44	6	11	11	7	12
	8x+5=6x+7	118	106	11	16	1		24	3	5	15	2	16	9	8
	-3x+3=-6x-2	218	208	69	37	2	18	14	1	28	11	8	17	2	15
	-7x+4=-6x+5	142	121	52	21			9	2	2	4	2	22	3	9
	8x+9=0	218	198	62	29	3	13	14		23	16	14	22	1	9
	-9x-6=5x-4	231	209	67	29	2	30	12		26	10	10	19	9	14
	x=5+4x	262	236	67	42	2	18	7	1	59	19	11	26	4	15
	-3x+8=-2x-6	141	128	58	20			3	1	8	13		22	6	9
	4x=9x	202	146					10				41	61		34
	3000x+4000=2000x+6000	171	148	9	10		5	25		4	42	2	31	7	15
	5x-5=2x-9	219	207	77	25	2	18	13	1	22	14	5	28	3	11
Test B	-8x-5=-7x-7	141	124	47	21		1	8	1	15	17	2	5	7	14
	-2x-6=-3x+8	96	83	25	32			5		5	11		4	4	4
	5x-4=-9x-6	221	197	77	33	4	33	6	2	15	12	13	7	5	8
	6x+7=8x+5	124	104	25	20	3		20	1	9	14	2	4	7	8
	-7x-4=2x-8	192	178	50	34	1	22	7	2	34	11	7	7	6	11
	9x+1=3x-8	214	194	70	42	3	14	8	1	22	20	8	8	7	11
	-6x-2=-3x+3	204	186	75	27	3	24	6	2	21	18	4	6	5	10
	3000x+4000=2000x+6000	137	115	10	17	2	3	15	1	8	36	1	9	8	8
	-6x+5=-7x+4	116	99	53	18			4		1	7		8	4	7
	2x-9=5x-5	200	185	71	29	3	13	5	2	28	12	7	10	3	12
	8x+9=0	181	163	46	34	2	12	14	1	22	11	9	16		7
	9x+5=4x+9	147	133	18	16	3	30	6		16	13	9	14	10	8
	-3x-2=3x+5	216	194	55	53	2	9	18	1	27	16	7	13	3	14
	x=5+4x	226	205	71	42	2	17	5	2	49	14	8	23	4	12
	8x-8=-6x+8	172	149	10	37	3	19	9	2	33	6	6	10	4	13
	4x=9x	189	145					17			1	47	54	1	25
	-8+x=7	52	44	8	13					4	4		13	1	8
	-6x=9	204	197	72		3	16	40		15	16	9	26		11
	Anzahl	6423	5734	1566	924	59	397	501	39	700	482	292	578	180	453

Tabelle 104: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehler	erkannte Fehler	Fehlerart											
					Vorzeichen falsch	Vertau-schung von Addition und Subtraktion	Vertau-schung von Multiplika-tion und Division	Kehrwert gebildet	Vertau-schung von Addition und Division	Vertau-schung von x-Term mit Konstante	Rechen-fehler	nur eine Seite umgeformt	Bearbei-tung abge-brochen	Aufgabe nicht bearbeitet	weiterer alge-braischer Fehler	Syntax verletzt
erste Umformung	Test A	-8+x=7	32	23	2	5						4			3	12
		-6x=9	56	55	7		1	1	32		6	2			1	6
		3x-8=9x+1	64	48	8	25				1	3	3			6	5
		3x+5=-3x-2	52	44	12	27				1	7	1			2	1
		2x-8=-7x-4	45	34	12	16				1	1	1			2	2
		-7x-7=-8x-5	40	33	11	14					5	2			2	2
		4x+9=9x+5	41	35	9	16				1	5	1			3	1
		-6x+8=8x-8	56	44	14	29				4	1					1
		8x+5=6x+7	29	22	8	10				2	2				2	1
		-3x+3=-6x-2	47	42	19	19				1	4	1				1
		-7x+4=-6x+5	37	33	17	11				2	2					1
		8x+9=0	43	35		27						6			1	2
		-9x-6=5x-4	43	35	13	20					1					2
		x=5+4x	123	106	40	40			1		41	3				7
		-3x+8=-2x-6	39	33	19	10				1	2					2
		4x=9x	19	7					1							6
		3000x+4000=2000x+6000	33	24	7	9									1	7
		5x-5=2x-9	50	42	24	15				1	1					2
	Test B	-8x-5=-7x-7	54	41	17	17				1	2	2			1	3
		-2x-6=-3x+8	49	39	16	18					3	1			2	2
		5x-4=-9x-6	63	52	23	23				2		1			3	1
		6x+7=8x+5	41	32	10	15				1		1			2	4
		-7x-4=2x-8	62	56	23	22				2	2	2			2	4
		9x+1=3x-8	63	52	12	24				1	7	4			4	4
		-6x-2=-3x+3	51	40	18	15				2	2	3			1	2
		3000x+4000=2000x+6000	39	28	10	10				1		2			4	3
		-6x+5=-7x+4	48	39	24	9						3			2	3
		2x-9=5x-5	49	43	15	18				2	2	2			3	3
		8x+9=0	45	37		30			1	1		4				2
		9x+5=4x+9	40	33	14	11					4	1			2	3
		-3x-2=3x+5	49	41	9	25				1	11	3			2	3
		x=5+4x	106	92	41	39			1	2	31	4			3	6
		8x-8=-6x+8	42	32	4	21				2					1	4
		4x=9x	20	9					1							8
		-8+x=7	11	8	1	3						1			1	4
		-6x=9	26	24	13			2	3		1	3				3
		Anzahl	1707	1393	472	593	1	3	40	33	146	61			56	123

Tabelle 105a: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungs-schritt			Fehler	erkannte Fehler	Fehlerart											
					Vorzeichen falsch	Vertau-schung von Addition und Subtraktion	Vertau-schung von Multiplika-tion und Division	Kehrwert gebildet	Vertau-schung von Addition und Division	Vertau-schung von x-Term mit Konstante	Rechen-fehler	nur eine Seite umgeformt	Bearbei-tung abge-brochen	Aufgabe nicht bearbeitet	weiterer alge-braischer Fehler	Syntax verletzt
mittlere Umformung	Test A	-8+x=7	6	6	1	1					1				1	2
		-6x=9	10	8	3	3										2
		3x-8=9x+1	61	56	21	12		2	4	1	2	13			5	8
		3x+5=-3x-2	46	39	14	10		1	3		1	8			1	6
		2x-8=-7x-4	36	29	7	10		2	1		2	4			3	6
		-7x-7=-8x-5	24	18	6	3			3		1	5				3
		4x+9=9x+5	36	35	8	4		3	2	1	5	6			4	5
		-6x+8=8x-8	41	37	7	11		2	2		5	5			3	4
		8x+5=6x+7	19	16	1	4			2			3			2	4
		-3x+3=-6x-2	45	42	14	17			5			7			1	4
		-7x+4=-6x+5	25	18	6	8			2			3			2	2
		8x+9=0	9	9	5				1		1	1				2
		-9x-6=5x-4	43	40	15	8		4	1		3	2			6	6
		x=5+4x	20	17	6	2		1		1	1	7			1	3
		-3x+8=-2x-6	29	27	11	6			1			7			4	3
		4x=9x	8	5												5
		3000x+4000=2000x+6000	12	7		1			1			2			2	2
		5x-5=2x-9	34	32	16	10			1			7			1	4
	Test B	-8x-5=-7x-7	28	24	7	3			1		2	4			3	7
		-2x-6=-3x+8	16	13	2	5			1		1	4			1	1
		5x-4=-9x-6	35	30	16	9		1	2		1	5			1	2
		6x+7=8x+5	29	21	7	4			2			8			5	2
		-7x-4=2x-8	40	33	16	8		2	1		2	7			3	2
		9x+1=3x-8	59	53	20	16		4	3		1	8			2	5
		-6x-2=-3x+3	40	36	12	9			2		2	11			2	2
		3000x+4000=2000x+6000	19	14		6			2		1	3			2	1
		-6x+5=-7x+4	18	13	7	2					1	1				2
		2x-9=5x-5	39	35	18	9			2		2	4				3
		8x+9=0	2	2	2											
		9x+5=4x+9	24	21	2	4		4			2	6			5	2
		-3x-2=3x+5	32	28	12	10			2			6				1
		x=5+4x	12	12	6	2			1		2	2				
		8x-8=-6x+8	30	24	6	9		3			2	3			3	1
		4x=9x	4	2												2
		-8+x=7	1													
		-6x=9	3	3	2				1			1				
		Anzahl	935	805	276	206		29	49	3	41	153			63	104

Tabelle 105b: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungsschritt					Fehlerart												
			Fehler	erkannte Fehler	Vorzeichen falsch	Vertauschung von Addition und Subtraktion	Vertauschung von Multiplikation und Division	Kehrwert gebildet	Vertauschung von Addition und Division	Vertauschung von x-Term mit Konstante	Rechenfehler	nur eine Seite umgeformt	Bearbeitung abgebrochen	Aufgabe nicht bearbeitet	weiterer algebraischer Fehler	Syntax verletzt
letzte Umformung	Test A	-8+x=7	6	6	1	1						3			1	1
		-6x=9	18	18	7	1		3	2	1	3	6				1
		3x-8=9x+1	83	82	35	1	3	9	12		11	6	5		3	3
		3x+5=-3x-2	106	105	48	5	2	11	11		20	7	4			7
		2x-8=-7x-4	95	93	6	2	2	20	9		33	5	9		5	4
		-7x-7=-8x-5	34	32	9	3		2	8		5	3			3	2
		4x+9=9x+5	81	80	6		1	11	13		28	6	11		4	2
		-6x+8=8x-8	92	86	7	1		11	11		38	1	10		4	4
		8x+5=6x+7	49	48	2	1	1		22	1	3	12	2		5	
		-3x+3=-6x-2	103	102	35	1	2	18	9		24	3	7		1	7
		-7x+4=-6x+5	47	38	23				7			1	2		1	4
		8x+9=0	124	124	57	1	3	13	13		21	9	10			3
		-9x-6=5x-4	119	111	38	1	2	26	11		22	8	10		3	3
		x=5+4x	70	69	21		2	17	5		16	4	4		1	2
		-3x+8=-2x-6	37	33	19	3			2		6	6			2	1
		4x=9x	35	19					8				5			6
		3000x+4000=2000x+6000	83	78	2			5	24		4	40			4	
		5x-5=2x-9	103	102	37		2	18	12		21	7	5		2	2
	Test B	-8x-5=-7x-7	42	42	19			1	7		10	11			3	
		-2x-6=-3x+8	24	24	6	8			4		1	6			1	
		5x-4=-9x-6	113	105	38		4	32	4		14	6	12		1	4
		6x+7=8x+5	45	42	8		3		18		9	5				
		-7x-4=2x-8	80	79	11	2	1	20	6		30	2	7		1	4
		9x+1=3x-8	80	77	38		3	10	4		14	8	8		1	1
		-6x-2=-3x+3	104	102	44	3	3	24	4		17	4	4		2	5
		3000x+4000=2000x+6000	64	60			2	3	13		7	31	1		2	1
		-6x+5=-7x+4	37	34	20	5			4			3			2	1
		2x-9=5x-5	98	94	38	1	3	13	3		24	5	7			5
		8x+9=0	98	97	43		2	12	13		22	6	7			2
		9x+5=4x+9	65	62	2		3	26	6		10	5	9		2	2
		-3x-2=3x+5	100	94	34	7	2	9	16		14	7	3		1	7
		x=5+4x	65	63	23		2	17	3		11	2	7			4
		8x-8=-6x+8	82	77		3	3	16	9		31	3	5			7
		4x=9x	38	25					16			1	5		1	2
		-8+x=7	2	2	2							1				
		-6x=9	18	16	10			3				7				1
		Anzahl	2440	2321	689	50	51	350	309	2	469	240	159		56	98

Tabelle 105c: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

1. Fehler im Umformungsschritt					Fehlerart												
			Fehler	erkannte Fehler	Vorzeichen falsch	Vertauschung von Addition und Subtraktion	Vertauschung von Multiplikation und Division	Kehrwert gebildet	Vertauschung von Addition und Division	Vertauschung von x-Term mit Konstante	Rechenfehler	nur eine Seite umgeformt	Bearbeitung abgebrochen	Aufgabe nicht bearbeitet	weiterer algebraischer Fehler	Syntax verletzt
nur eine Umformung	Test A	-8+x=7	29	22	3	9					2	2	1			8
		-6x=9	132	131	44	1	4	4	64	1	11	5	5			3
		3x-8=9x+1	7	6		1									1	4
		3x+5=-3x-2	16	12		8					2					4
		2x-8=-7x-4	7	6	1	2					1					3
		-7x-7=-8x-5	11	8	2	1										5
		4x+9=9x+5	6	3												3
		-6x+8=8x-8	10	8		5										3
		8x+5=6x+7	5	4		1										3
		-3x+3=-6x-2	5	4	1											3
		-7x+4=-6x+5	11	10	6	2										2
		8x+9=0	16	4		1					1					2
		-9x-6=5x-4	7	4	1											3
		x=5+4x	17	12					1		1	5	1		2	3
		-3x+8=-2x-6	14	13	9	1										3
		4x=9x	43	18					1							17
		3000x+4000=2000x+6000	10	6												6
		5x-5=2x-9	4	3												3
	Test B	-8x-5=-7x-7	10	10	4	1					1					4
		-2x-6=-3x+8	3	3	1	1										1
		5x-4=-9x-6	2	2		1										1
		6x+7=8x+5	3	3		1										2
		-7x-4=2x-8	3	3		2										1
		9x+1=3x-8	4	4		2			1							1
		-6x-2=-3x+3	3	2	1											1
		3000x+4000=2000x+6000	6	4		1										3
		-6x+5=-7x+4	5	5	2	2										1
		2x-9=5x-5	4	3		1						1				1
		8x+9=0	18	9	1	4						1				3
		9x+5=4x+9	4	3		1						1			1	1
		-3x-2=3x+5	18	14		11					2					3
		x=5+4x	19	14	1	1					5	6			1	2
		8x-8=-6x+8	7	5		4										1
		4x=9x	31	13												13
		-8+x=7	25	21	5	10					4	2				4
		-6x=9	127	124	47		3	11	36		14	5	5			7
		Anzahl	642	516	129	75	7	15	103	1	44	28	12		5	128

Tabelle 105d: Verteilung der Fehler nach Fehlerklassifikation gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

Erster Fehler		Fehler bei Umformungen
bei erster Umformung	Vorzeichen falsch	472
	Vertauschung von Addition und Subtraktion	593
	Vertauschung von Multiplikation und Division	1
	Kehrwert gebildet	3
	Vertauschung vom Addition und Division	40
	Vertauschung von x-Term mit Konstante	33
	Rechenfehler	146
	nur eine Seite umgeformt	61
	Bearbeitung abgebrochen	
	Aufgabe nicht bearbeitet	
	weiterer algebraischer Fehler	56
	Syntax verletzt	123
	Gesamt: Anzahl	1393
bei mittlerer Umformung	Vorzeichen falsch	276
	Vertauschung von Addition und Subtraktion	206
	Vertauschung von Multiplikation und Division	
	Kehrwert gebildet	29
	Vertauschung vom Addition und Division	49
	Vertauschung von x-Term mit Konstante	3
	Rechenfehler	41
	nur eine Seite umgeformt	153
	Bearbeitung abgebrochen	
	Aufgabe nicht bearbeitet	
	weiterer algebraischer Fehler	63
	Syntax verletzt	104
	Gesamt: Anzahl	805
bei letzter Umformung	Vorzeichen falsch	818
	Vertauschung von Addition und Subtraktion	125
	Vertauschung von Multiplikation und Division	58
	Kehrwert gebildet	365
	Vertauschung vom Addition und Division	412
	Vertauschung von x-Term mit Konstante	3
	Rechenfehler	513
	nur eine Seite umgeformt	268
	Bearbeitung abgebrochen	171
	Aufgabe nicht bearbeitet	
	weiterer algebraischer Fehler	61
	Syntax verletzt	226
	Gesamt: Anzahl	2837

Tabelle 106: Fehler nach Fehlerklassifikation
gruppiert nach Umformungsschritt (nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

		Gesamt anzahl falsch	1. Fehler bei Umformungsstrategie							
			nicht erkenn-bar, keine Verein-fachung	x-Term nach rechts	x-Term nach links	Kons-tante nach rechts	Kons-tante nach links	Term-umfor-mung (-verein-fachung)	x-Terme weg-gelassen	Kons-tanten weg-gelassen
Test A	-8+x=7	77	40	5		30	2			
	-6x=9	228	224				2	2		
	3x-8=9x+1	240	153	23	20	24	19	1		
	3x+5=-3x-2	247	165	15	17	33	10		7	
	2x-8=-7x-4	213	144	15	10	32	9	2		1
	-7x-7=-8x-5	128	70	9	13	25	9	1		1
	4x+9=9x+5	195	131	16	15	17	13	2		1
	-6x+8=8x-8	232	148	17	22	24	11			10
	8x+5=6x+7	125	90	3	12	15	4	1		
	-3x+3=-6x-2	232	154	17	18	31	11	1		
	-7x+4=-6x+5	143	88	4	28	16	6		1	
	8x+9=0	231	164	6		59	1	1		
	-9x-6=5x-4	242	178	10	22	16	13			3
	x=5+4x	264	134	1	108	2	18	1		
	-3x+8=-2x-6	145	87	5	22	21	9			1
	4x=9x	258	255					3		
	3000x+4000=2000x+6000	176	138	3	11	21	1			2
	5x-5=2x-9	238	165	2	20	37	13			1
Test B	-8x-5=-7x-7	144	80	6	20	27	11			
	-2x-6=-3x+8	103	40	11	16	20	16			
	5x-4=-9x-6	240	161	8	28	32	10			1
	6x+7=8x+5	133	79	6	18	18	11			1
	-7x-4=2x-8	211	132	11	36	21	11			
	9x+1=3x-8	224	145	6	26	38	9			
	-6x-2=-3x+3	216	148	6	30	20	11			1
	3000x+4000=2000x+6000	144	97	5	13	22	5			2
	-6x+5=-7x+4	117	55	13	19	18	11			1
	2x-9=5x-5	217	146	11	21	23	15			1
	8x+9=0	192	136	4		52				
	9x+5=4x+9	159	106	2	14	29	8			
	-3x-2=3x+5	224	136	11	39	14	15		9	
	x=5+4x	236	122	2	93		17	2		
	8x-8=-6x+8	193	121	8	21	29	8			6
	4x=9x	261	255	1				5		
	-8+x=7	52	27	4		21				
	-6x=9	207	203		1	1		2		
Anzahl		6887	4717	266	733	788	309	24	17	33

Tabelle 107: Verteilung der Fehler nach Umformungsstrategie ("bei welcher Umformungsstrategie erfolgte der erste Fehler", nur unter Beachtung des ersten Fehlers)

		gesamt	erste Umformung: x-Term nach rechts	x-Term nach links	Konstante nach rechts	Konstante nach links	andere
Test A	-8+x=7	441	5		297		139
	-6x=9	441					441
	3x-8=9x+1	441	126	129	129	30	27
	3x+5=-3x-2	441	40	235	74	51	41
	2x-8=-7x-4	441	39	252	90	34	26
	-7x-7=-8x-5	441	34	157	96	30	124
	4x+9=9x+5	441	141	151	67	57	25
	-6x+8=8x-8	441	148	153	64	42	34
	8x+5=6x+7	441	20	267	109	15	30
	-3x+3=-6x-2	441	59	244	62	47	29
	-7x+4=-6x+5	441	93	112	92	15	129
	8x+9=0	441	18		369		54
	-9x-6=5x-4	441	126	164	90	27	34
	x=5+4x	441		295		25	121
	-3x+8=-2x-6	441	82	108	61	56	134
	4x=9x	441					441
	3000x+4000=2000x+6000	441	18	244	102	10	67
	5x-5=2x-9	441	20	256	83	43	39
Test B	-8x-5=-7x-7	423	62	161	74	32	94
	-2x-6=-3x+8	423	40	190	82	18	93
	5x-4=-9x-6	423	32	278	68	24	21
	6x+7=8x+5	423	128	179	59	40	17
	-7x-4=2x-8	423	123	181	65	34	20
	9x+1=3x-8	423	19	276	70	40	18
	-6x-2=-3x+3	423	92	212	84	20	15
	3000x+4000=2000x+6000	423	16	268	87	13	39
	-6x+5=-7x+4	423	33	196	52	41	101
	2x-9=5x-5	423	122	183	71	27	20
	8x+9=0	423	13		363		47
	9x+5=4x+9	423	16	280	90	13	24
	-3x-2=3x+5	423	117	161	82	16	47
	x=5+4x	423		284		32	107
	8x-8=-6x+8	423	22	279	79	15	28
	4x=9x	423					423
	-8+x=7	423	9		361		53
	-6x=9	423					423
Anzahl		15552	1813	5895	3472	847	3525

Tabelle 108: Verteilung der Anfangsstrategie je Aufgabe (welche Anfangsstrategie wurde von der Schülerin, von dem Schüler verfolgt)

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-8+x=7	günstige Strategie	Konstante nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	5	
								Anzahl in Prozent	1,1%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	29	
								Anzahl in Prozent	6,6%	
							anderes	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	9,8%	
					Ja	erste Umformung	Konstante nach rechts	Anzahl		268
								Anzahl in Prozent		60,8%
							anderes	Anzahl		96
								Anzahl in Prozent		21,8%
	3x-8=9x+1	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	59	
								Anzahl in Prozent	13,4%	
							x-Term nach links	Anzahl	64	
								Anzahl in Prozent	14,5%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	82	
								Anzahl in Prozent	18,6%	
							Konstante nach links	Anzahl	12	
								Anzahl in Prozent	2,7%	
							anderes	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	5,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		67
								Anzahl in Prozent		15,2%
							x-Term nach links	Anzahl		65
								Anzahl in Prozent		14,7%
							Konstante nach rechts	Anzahl		47
								Anzahl in Prozent		10,7%
							Konstante nach links	Anzahl		18
								Anzahl in Prozent		4,1%
							anderes	Anzahl		1
								Anzahl in Prozent		,2%
	3x+5=-3x-2	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	27	
								Anzahl in Prozent	6,1%	
							x-Term nach links	Anzahl	102	
								Anzahl in Prozent	23,1%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	55	
								Anzahl in Prozent	12,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	29	
								Anzahl in Prozent	6,6%	
							anderes	Anzahl	40	
								Anzahl in Prozent	9,1%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		13
								Anzahl in Prozent		2,9%
							x-Term nach links	Anzahl		133
								Anzahl in Prozent		30,2%
							Konstante nach rechts	Anzahl		19
								Anzahl in Prozent		4,3%
							Konstante nach links	Anzahl		22
								Anzahl in Prozent		5,0%
							anderes	Anzahl		1
								Anzahl in Prozent		,2%
	2x-8=-7x-4	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	23	
								Anzahl in Prozent	5,2%	
							x-Term nach links	Anzahl	96	
								Anzahl in Prozent	21,8%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	55	
								Anzahl in Prozent	12,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	20	
								Anzahl in Prozent	4,5%	

Tabelle 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	2x-8=-7x-4	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	anderes	Anzahl	24	
								Anzahl in Prozent	5,4%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		16
								Anzahl in Prozent		3,6%
							x-Term nach links	Anzahl		156
								Anzahl in Prozent		35,4%
							Konstante nach rechts	Anzahl		35
								Anzahl in Prozent		7,9%
							Konstante nach links	Anzahl		14
								Anzahl in Prozent		3,2%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	-7x-7=-8x-5	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	17	
								Anzahl in Prozent	3,9%	
							x-Term nach links	Anzahl	31	
								Anzahl in Prozent	7,0%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	36	
								Anzahl in Prozent	8,2%	
							Konstante nach links	Anzahl	16	
								Anzahl in Prozent	3,6%	
							anderes	Anzahl	31	
								Anzahl in Prozent	7,0%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		17
								Anzahl in Prozent		3,9%
							x-Term nach links	Anzahl		126
								Anzahl in Prozent		28,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		60
								Anzahl in Prozent		13,6%
							Konstante nach links	Anzahl		14
								Anzahl in Prozent		3,2%
							anderes	Anzahl		93
								Anzahl in Prozent		21,1%
	4x+9=9x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	42	
								Anzahl in Prozent	9,5%	
							x-Term nach links	Anzahl	62	
								Anzahl in Prozent	14,1%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	44	
								Anzahl in Prozent	10,0%	
							Konstante nach links	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	5,9%	
							anderes	Anzahl	23	
								Anzahl in Prozent	5,2%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		99
								Anzahl in Prozent		22,4%
							x-Term nach links	Anzahl		89
								Anzahl in Prozent		20,2%
							Konstante nach rechts	Anzahl		23
								Anzahl in Prozent		5,2%
							Konstante nach links	Anzahl		31
								Anzahl in Prozent		7,0%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	-6x+8=8x-8	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	61	
								Anzahl in Prozent	13,8%	
							x-Term nach links	Anzahl	80	
								Anzahl in Prozent	18,1%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	46	
								Anzahl in Prozent	10,4%	

Tabelle 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-6x+8=8x-8	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	Konstante nach links	Anzahl	17	
								Anzahl in Prozent	3,9%	
							anderes	Anzahl	32	
								Anzahl in Prozent	7,3%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		87
								Anzahl in Prozent		19,7%
							x-Term nach links	Anzahl		73
								Anzahl in Prozent		16,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		18
								Anzahl in Prozent		4,1%
							Konstante nach links	Anzahl		25
								Anzahl in Prozent		5,7%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	8x+5=6x+7	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	9	
								Anzahl in Prozent	2,0%	
							x-Term nach links	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	9,8%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	39	
								Anzahl in Prozent	8,8%	
							Konstante nach links	Anzahl	9	
								Anzahl in Prozent	2,0%	
							anderes	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	5,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		11
								Anzahl in Prozent		2,5%
							x-Term nach links	Anzahl		224
								Anzahl in Prozent		50,8%
							Konstante nach rechts	Anzahl		70
								Anzahl in Prozent		15,9%
							Konstante nach links	Anzahl		6
								Anzahl in Prozent		1,4%
							anderes	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
	-3x+3=-6x-2	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	29	
								Anzahl in Prozent	6,6%	
							x-Term nach links	Anzahl	113	
								Anzahl in Prozent	25,6%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	42	
								Anzahl in Prozent	9,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	29	
								Anzahl in Prozent	6,6%	
							anderes	Anzahl	25	
								Anzahl in Prozent	5,7%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		30
								Anzahl in Prozent		6,8%
							x-Term nach links	Anzahl		131
								Anzahl in Prozent		29,7%
							Konstante nach rechts	Anzahl		20
								Anzahl in Prozent		4,5%
							Konstante nach links	Anzahl		18
								Anzahl in Prozent		4,1%
							anderes	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
	-7x+4=-6x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	8	
								Anzahl in Prozent	1,8%	
							x-Term nach links	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	9,8%	

Tabelle 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst: Nein	Aufgabe richtig gelöst: Ja
Aufgabe	-7x+4=-6x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	Konstante nach rechts	Anzahl	44	
								Anzahl in Prozent	10,0%	
							Konstante nach links	Anzahl	8	
								Anzahl in Prozent	1,8%	
							anderes	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	9,8%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		85
								Anzahl in Prozent		19,3%
							x-Term nach links	Anzahl		69
								Anzahl in Prozent		15,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		48
								Anzahl in Prozent		10,9%
							Konstante nach links	Anzahl		7
								Anzahl in Prozent		1,6%
							anderes	Anzahl		86
								Anzahl in Prozent		19,5%
	8x+9=0	günstige Strategie	Konstante nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	11	
								Anzahl in Prozent	2,5%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	175	
								Anzahl in Prozent	39,7%	
							anderes	Anzahl	49	
								Anzahl in Prozent	11,1%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		7
								Anzahl in Prozent		1,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		194
								Anzahl in Prozent		44,0%
							anderes	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,1%
	-9x-6=5x-4	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	59	
								Anzahl in Prozent	13,4%	
							x-Term nach links	Anzahl	80	
								Anzahl in Prozent	18,1%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	50	
								Anzahl in Prozent	11,3%	
							Konstante nach links	Anzahl	24	
								Anzahl in Prozent	5,4%	
							anderes	Anzahl	32	
								Anzahl in Prozent	7,3%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		67
								Anzahl in Prozent		15,2%
							x-Term nach links	Anzahl		84
								Anzahl in Prozent		19,0%
							Konstante nach rechts	Anzahl		40
								Anzahl in Prozent		9,1%
							Konstante nach links	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	-3x+8=-2x-6	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	4	
								Anzahl in Prozent	,9%	
							x-Term nach links	Anzahl	37	
								Anzahl in Prozent	8,4%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	34	
								Anzahl in Prozent	7,7%	
							Konstante nach links	Anzahl	19	
								Anzahl in Prozent	4,3%	
							anderes	Anzahl	53	
								Anzahl in Prozent	12,0%	

Tabelle 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-3x+8=-2x-6	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		78
								Anzahl in Prozent		17,7%
							x-Term nach links	Anzahl		71
								Anzahl in Prozent		16,1%
							Konstante nach rechts	Anzahl		27
								Anzahl in Prozent		6,1%
							Konstante nach links	Anzahl		37
								Anzahl in Prozent		8,4%
							anderes	Anzahl		81
								Anzahl in Prozent		18,4%
	3000x+4000=2000x+6000	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	9	
								Anzahl in Prozent	2,0%	
							x-Term nach links	Anzahl	67	
								Anzahl in Prozent	15,2%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	45	
								Anzahl in Prozent	10,2%	
							Konstante nach links	Anzahl	6	
								Anzahl in Prozent	1,4%	
							anderes	Anzahl	51	
								Anzahl in Prozent	11,6%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		9
								Anzahl in Prozent		2,0%
							x-Term nach links	Anzahl		177
								Anzahl in Prozent		40,1%
							Konstante nach rechts	Anzahl		57
								Anzahl in Prozent		12,9%
							Konstante nach links	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
							anderes	Anzahl		16
								Anzahl in Prozent		3,6%
	5x-5=2x-9	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	9	
								Anzahl in Prozent	2,0%	
							x-Term nach links	Anzahl	119	
								Anzahl in Prozent	27,0%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	52	
								Anzahl in Prozent	11,8%	
							Konstante nach links	Anzahl	25	
								Anzahl in Prozent	5,7%	
							anderes	Anzahl	35	
								Anzahl in Prozent	7,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		11
								Anzahl in Prozent		2,5%
							x-Term nach links	Anzahl		137
								Anzahl in Prozent		31,1%
							Konstante nach rechts	Anzahl		31
								Anzahl in Prozent		7,0%
							Konstante nach links	Anzahl		18
								Anzahl in Prozent		4,1%
							anderes	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
	-8x-5=-7x-7	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	15	
								Anzahl in Prozent	3,5%	
							x-Term nach links	Anzahl	52	
								Anzahl in Prozent	12,3%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	36	
								Anzahl in Prozent	8,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	13	
								Anzahl in Prozent	3,1%	

Tabelle 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-8x-5=-7x-7	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	anderes	Anzahl	29	
								Anzahl in Prozent	6,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		47
								Anzahl in Prozent		11,1%
							x-Term nach links	Anzahl		109
								Anzahl in Prozent		25,8%
							Konstante nach rechts	Anzahl		38
								Anzahl in Prozent		9,0%
							Konstante nach links	Anzahl		19
								Anzahl in Prozent		4,5%
							anderes	Anzahl		65
								Anzahl in Prozent		15,4%
	-2x-6=-3x+8	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	18	
								Anzahl in Prozent	4,3%	
							x-Term nach links	Anzahl	31	
								Anzahl in Prozent	7,3%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	6,1%	
							Konstante nach links	Anzahl	12	
								Anzahl in Prozent	2,8%	
							anderes	Anzahl	16	
								Anzahl in Prozent	3,8%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		22
								Anzahl in Prozent		5,2%
							x-Term nach links	Anzahl		159
								Anzahl in Prozent		37,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		56
								Anzahl in Prozent		13,2%
							Konstante nach links	Anzahl		6
								Anzahl in Prozent		1,4%
							anderes	Anzahl		77
								Anzahl in Prozent		18,2%
	5x-4=-9x-6	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	25	
								Anzahl in Prozent	5,9%	
							x-Term nach links	Anzahl	138	
								Anzahl in Prozent	32,6%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	46	
								Anzahl in Prozent	10,9%	
							Konstante nach links	Anzahl	15	
								Anzahl in Prozent	3,5%	
							anderes	Anzahl	18	
								Anzahl in Prozent	4,3%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		7
								Anzahl in Prozent		1,7%
							x-Term nach links	Anzahl		140
								Anzahl in Prozent		33,1%
							Konstante nach rechts	Anzahl		22
								Anzahl in Prozent		5,2%
							Konstante nach links	Anzahl		9
								Anzahl in Prozent		2,1%
							anderes	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
	6x+7=8x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	19	
								Anzahl in Prozent	4,5%	
							x-Term nach links	Anzahl	61	
								Anzahl in Prozent	14,4%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	27	
								Anzahl in Prozent	6,4%	

Tabelle 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	6x+7=8x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	Konstante nach links	Anzahl	14	
								Anzahl in Prozent	3,3%	
							anderes	Anzahl	13	
								Anzahl in Prozent	3,1%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		109
								Anzahl in Prozent		25,8%
							x-Term nach links	Anzahl		118
								Anzahl in Prozent		27,9%
							Konstante nach rechts	Anzahl		32
								Anzahl in Prozent		7,6%
							Konstante nach links	Anzahl		26
								Anzahl in Prozent		6,1%
							anderes	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
	-7x-4=2x-8	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	10,2%	
							x-Term nach links	Anzahl	97	
								Anzahl in Prozent	22,9%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	41	
								Anzahl in Prozent	9,7%	
							Konstante nach links	Anzahl	17	
								Anzahl in Prozent	4,0%	
							anderes	Anzahl	15	
								Anzahl in Prozent	3,5%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		80
								Anzahl in Prozent		18,9%
							x-Term nach links	Anzahl		84
								Anzahl in Prozent		19,9%
							Konstante nach rechts	Anzahl		24
								Anzahl in Prozent		5,7%
							Konstante nach links	Anzahl		17
								Anzahl in Prozent		4,0%
							anderes	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
	9x+1=3x-8	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	14	
								Anzahl in Prozent	3,3%	
							x-Term nach links	Anzahl	125	
								Anzahl in Prozent	29,6%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	46	
								Anzahl in Prozent	10,9%	
							Konstante nach links	Anzahl	24	
								Anzahl in Prozent	5,7%	
							anderes	Anzahl	16	
								Anzahl in Prozent	3,8%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
							x-Term nach links	Anzahl		151
								Anzahl in Prozent		35,7%
							Konstante nach rechts	Anzahl		24
								Anzahl in Prozent		5,7%
							Konstante nach links	Anzahl		16
								Anzahl in Prozent		3,8%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	-6x-2=-3x+3	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	37	
								Anzahl in Prozent	8,7%	
							x-Term nach links	Anzahl	103	
								Anzahl in Prozent	24,3%	

Tabelle 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-6x-2=-3x+3	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	Konstante nach rechts	Anzahl	55	
								Anzahl in Prozent	13,0%	
							Konstante nach links	Anzahl	11	
								Anzahl in Prozent	2,6%	
							anderes	Anzahl	12	
								Anzahl in Prozent	2,8%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		55
								Anzahl in Prozent		13,0%
							x-Term nach links	Anzahl		109
								Anzahl in Prozent		25,8%
							Konstante nach rechts	Anzahl		29
								Anzahl in Prozent		6,9%
							Konstante nach links	Anzahl		9
								Anzahl in Prozent		2,1%
							anderes	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
	3000x+4000=2000x+6000	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	11	
								Anzahl in Prozent	2,6%	
							x-Term nach links	Anzahl	58	
								Anzahl in Prozent	13,7%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	44	
								Anzahl in Prozent	10,4%	
							Konstante nach links	Anzahl	8	
								Anzahl in Prozent	1,9%	
							anderes	Anzahl	24	
								Anzahl in Prozent	5,7%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
							x-Term nach links	Anzahl		210
								Anzahl in Prozent		49,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		43
								Anzahl in Prozent		10,2%
							Konstante nach links	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
							anderes	Anzahl		15
								Anzahl in Prozent		3,5%
	-6x+5=-7x+4	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	14	
								Anzahl in Prozent	3,3%	
							x-Term nach links	Anzahl	41	
								Anzahl in Prozent	9,7%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	20	
								Anzahl in Prozent	4,7%	
							Konstante nach links	Anzahl	17	
								Anzahl in Prozent	4,0%	
							anderes	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	6,1%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		19
								Anzahl in Prozent		4,5%
							x-Term nach links	Anzahl		155
								Anzahl in Prozent		36,6%
							Konstante nach rechts	Anzahl		32
								Anzahl in Prozent		7,6%
							Konstante nach links	Anzahl		24
								Anzahl in Prozent		5,7%
							anderes	Anzahl		75
								Anzahl in Prozent		17,7%
	2x-9=5x-5	günstige Strategie	x-Term nach	Aufgabe richtig	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	49	
								Anzahl in Prozent	11,6%	

Tabelle 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	2x-9=5x-5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach links	Anzahl	94	
								Anzahl in Prozent	22,2%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	40	
								Anzahl in Prozent	9,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	18	
								Anzahl in Prozent	4,3%	
							anderes	Anzahl	18	
								Anzahl in Prozent	4,3%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		73
								Anzahl in Prozent		17,3%
							x-Term nach links	Anzahl		89
								Anzahl in Prozent		21,0%
							Konstante nach rechts	Anzahl		31
								Anzahl in Prozent		7,3%
							Konstante nach links	Anzahl		9
								Anzahl in Prozent		2,1%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	8x+9=0	günstige Strategie	Konstante nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	6	
								Anzahl in Prozent	1,4%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	147	
								Anzahl in Prozent	34,8%	
							anderes	Anzahl	42	
								Anzahl in Prozent	9,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		7
								Anzahl in Prozent		1,7%
							Konstante nach rechts	Anzahl		216
								Anzahl in Prozent		51,1%
							anderes	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
	9x+5=4x+9	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	9	
								Anzahl in Prozent	2,1%	
							x-Term nach links	Anzahl	82	
								Anzahl in Prozent	19,4%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	41	
								Anzahl in Prozent	9,7%	
							Konstante nach links	Anzahl	8	
								Anzahl in Prozent	1,9%	
							anderes	Anzahl	21	
								Anzahl in Prozent	5,0%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		7
								Anzahl in Prozent		1,7%
							x-Term nach links	Anzahl		198
								Anzahl in Prozent		46,8%
							Konstante nach rechts	Anzahl		49
								Anzahl in Prozent		11,6%
							Konstante nach links	Anzahl		5
								Anzahl in Prozent		1,2%
							anderes	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
	-3x-2=3x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	49	
								Anzahl in Prozent	11,6%	
							x-Term nach links	Anzahl	73	
								Anzahl in Prozent	17,3%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	53	
								Anzahl in Prozent	12,5%	
							Konstante nach links	Anzahl	10	
								Anzahl in Prozent	2,4%	

Tabelle 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

									Aufgabe richtig gelöst	
									Nein	Ja
Aufgabe	-3x-2=3x+5	günstige Strategie	x-Term nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	anderes	Anzahl	45	
								Anzahl in Prozent	10,6%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		68
								Anzahl in Prozent		16,1%
							x-Term nach links	Anzahl		88
								Anzahl in Prozent		20,8%
							Konstante nach rechts	Anzahl		29
								Anzahl in Prozent		6,9%
							Konstante nach links	Anzahl		6
								Anzahl in Prozent		1,4%
							anderes	Anzahl		2
								Anzahl in Prozent		,5%
	8x-8=-6x+8	günstige Strategie	x-Term nach links	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	14	
								Anzahl in Prozent	3,3%	
							x-Term nach links	Anzahl	105	
								Anzahl in Prozent	24,8%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	43	
								Anzahl in Prozent	10,2%	
							Konstante nach links	Anzahl	12	
								Anzahl in Prozent	2,8%	
							anderes	Anzahl	25	
								Anzahl in Prozent	5,9%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		8
								Anzahl in Prozent		1,9%
							x-Term nach links	Anzahl		174
								Anzahl in Prozent		41,1%
							Konstante nach rechts	Anzahl		36
								Anzahl in Prozent		8,5%
							Konstante nach links	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
							anderes	Anzahl		3
								Anzahl in Prozent		,7%
	-8+x=7	günstige Strategie	Konstante nach rechts	Aufgabe richtig gelöst	Nein	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl	5	
								Anzahl in Prozent	1,2%	
							Konstante nach rechts	Anzahl	21	
								Anzahl in Prozent	5,0%	
							anderes	Anzahl	26	
								Anzahl in Prozent	6,1%	
					Ja	erste Umformung	x-Term nach rechts	Anzahl		4
								Anzahl in Prozent		,9%
							Konstante nach rechts	Anzahl		340
								Anzahl in Prozent		80,4%
							anderes	Anzahl		27
								Anzahl in Prozent		6,4%
Gesamt	Anzahl								5509	7451

Tabelle 109: Verteilung des Lösungserfolgs in Abhängigkeit von der Anfangsstrategie je Aufgabe

		Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
		Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
		Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	3	7,9%	35	92,1%	3	7,9%	35	92,1%
	-6x=9	11	28,9%	27	71,1%	11	28,9%	27	71,1%
	3x-8=9x+1	13	34,2%	25	65,8%	12	31,6%	26	68,4%
	3x+5=-3x-2	16	42,1%	22	57,9%	13	34,2%	25	65,8%
	2x-8=-7x-4	13	34,2%	25	65,8%	11	28,9%	27	71,1%
	-7x-7=-8x-5	5	13,2%	33	86,8%	5	13,2%	33	86,8%
	4x+9=9x+5	10	26,3%	28	73,7%	8	21,1%	30	78,9%
	-6x+8=8x-8	14	36,8%	24	63,2%	13	34,2%	25	65,8%
	8x+5=6x+7	7	18,4%	31	81,6%	6	15,8%	32	84,2%
	-3x+3=-6x-2	15	39,5%	23	60,5%	14	36,8%	24	63,2%
	-7x+4=-6x+5	1	2,6%	37	97,4%	1	2,6%	37	97,4%
	8x+9=0	17	44,7%	21	55,3%	15	39,5%	23	60,5%
	-9x-6=5x-4	14	36,8%	24	63,2%	14	36,8%	24	63,2%
	x=5+4x	19	50,0%	19	50,0%	18	47,4%	20	52,6%
	-3x+8=-2x-6	2	5,3%	36	94,7%	2	5,3%	36	94,7%
	4x=9x	20	52,6%	18	47,4%	13	34,2%	25	65,8%
	3000x+4000=2000x+6000	10	26,3%	28	73,7%	10	26,3%	28	73,7%
	5x-5=2x-9	17	44,7%	21	55,3%	15	39,5%	23	60,5%
Test B	-8x-5=-7x-7	4	16,0%	21	84,0%	4	16,0%	21	84,0%
	-2x-6=-3x+8	8	32,0%	17	68,0%	8	32,0%	17	68,0%
	5x-4=-9x-6	13	52,0%	12	48,0%	13	52,0%	12	48,0%
	6x+7=8x+5	7	28,0%	18	72,0%	6	24,0%	19	76,0%
	-7x-4=2x-8	12	48,0%	13	52,0%	9	36,0%	16	64,0%
	9x+1=3x-8	13	52,0%	12	48,0%	12	48,0%	13	52,0%
	-6x-2=-3x+3	12	48,0%	13	52,0%	11	44,0%	14	56,0%
	3000x+4000=2000x+6000	7	28,0%	18	72,0%	7	28,0%	18	72,0%
	-6x+5=-7x+4	7	28,0%	18	72,0%	7	28,0%	18	72,0%
	2x-9=5x-5	13	52,0%	12	48,0%	10	40,0%	15	60,0%
	8x+9=0	10	40,0%	15	60,0%	9	36,0%	16	64,0%
	9x+5=4x+9	12	48,0%	13	52,0%	11	44,0%	14	56,0%
	-3x-2=3x+5	14	56,0%	11	44,0%	12	48,0%	13	52,0%
	x=5+4x	16	64,0%	9	36,0%	16	64,0%	9	36,0%
	8x-8=-6x+8	13	52,0%	12	48,0%	11	44,0%	14	56,0%
	4x=9x	16	64,0%	9	36,0%	10	40,0%	15	60,0%
	-8+x=7	3	12,0%	22	88,0%	3	12,0%	22	88,0%
	-6x=9	14	56,0%	11	44,0%	13	52,0%	12	48,0%
Gesamt		401	35,4%	733	64,6%	356	31,4%	778	68,6%

Tabelle 110: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die immer die günstige Strategie anwenden (Test A: N = 38; Test B: N = 25) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die günstige Strategie immer

		Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
		Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
		Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	48	20,2%	190	79,8%	47	19,7%	191	80,3%
	-6x=9	138	58,0%	100	42,0%	135	56,7%	103	43,3%
	3x-8=9x+1	140	58,8%	98	41,2%	131	55,0%	107	45,0%
	3x+5=-3x-2	144	60,5%	94	39,5%	133	55,9%	105	44,1%
	2x-8=-7x-4	128	53,8%	110	46,2%	114	47,9%	124	52,1%
	-7x-7=-8x-5	85	35,7%	153	64,3%	80	33,6%	158	66,4%
	4x+9=9x+5	122	51,3%	116	48,7%	113	47,5%	125	52,5%
	-6x+8=8x-8	144	60,5%	94	39,5%	132	55,5%	106	44,5%
	8x+5=6x+7	80	33,6%	158	66,4%	74	31,1%	164	68,9%
	-3x+3=-6x-2	141	59,2%	97	40,8%	129	54,2%	109	45,8%
	-7x+4=-6x+5	104	43,7%	134	56,3%	100	42,0%	138	58,0%
	8x+9=0	138	58,0%	100	42,0%	128	53,8%	110	46,2%
	-9x-6=5x-4	140	58,8%	98	41,2%	129	54,2%	109	45,8%
	x=5+4x	157	66,0%	81	34,0%	151	63,4%	87	36,6%
	-3x+8=-2x-6	105	44,1%	133	55,9%	99	41,6%	139	58,4%
	4x=9x	157	66,0%	81	34,0%	119	50,0%	119	50,0%
	3000x+4000=2000x+6000	111	46,6%	127	53,4%	108	45,4%	130	54,6%
	5x-5=2x-9	138	58,0%	100	42,0%	127	53,4%	111	46,6%
Test B	-8x-5=-7x-7	101	39,3%	156	60,7%	98	38,1%	159	61,9%
	-2x-6=-3x+8	73	28,4%	184	71,6%	66	25,7%	191	74,3%
	5x-4=-9x-6	156	60,7%	101	39,3%	139	54,1%	118	45,9%
	6x+7=8x+5	103	40,1%	154	59,9%	95	37,0%	162	63,0%
	-7x-4=2x-8	150	58,4%	107	41,6%	137	53,3%	120	46,7%
	9x+1=3x-8	144	56,0%	113	44,0%	136	52,9%	121	47,1%
	-6x-2=-3x+3	142	55,3%	115	44,7%	132	51,4%	125	48,6%
	3000x+4000=2000x+6000	104	40,5%	153	59,5%	97	37,7%	160	62,3%
	-6x+5=-7x+4	87	33,9%	170	66,1%	85	33,1%	172	66,9%
	2x-9=5x-5	146	56,8%	111	43,2%	132	51,4%	125	48,6%
	8x+9=0	131	51,0%	126	49,0%	120	46,7%	137	53,3%
	9x+5=4x+9	109	42,4%	148	57,6%	99	38,5%	158	61,5%
	-3x-2=3x+5	153	59,5%	104	40,5%	143	55,6%	114	44,4%
	x=5+4x	155	60,3%	102	39,7%	144	56,0%	113	44,0%
	8x-8=-6x+8	138	53,7%	119	46,3%	116	45,1%	141	54,9%
	4x=9x	170	66,1%	87	33,9%	122	47,5%	135	52,5%
	-8+x=7	36	14,0%	221	86,0%	36	14,0%	221	86,0%
	-6x=9	135	52,5%	122	47,5%	131	51,0%	126	49,0%
Gesamt		4453	50,0%	4457	50,0%	4077	45,8%	4833	54,2%

Tabelle 111: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die niemals die günstige Strategie anwenden (Test A: N = 238; Test B: N = 257) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die günstige Strategie niemals anwenden)

		Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
		Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
		Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	12	24,5%	37	75,5%	11	22,4%	38	77,6%
	-6x=9	28	57,1%	21	42,9%	26	53,1%	23	46,9%
	3x-8=9x+1	29	59,2%	20	40,8%	28	57,1%	21	42,9%
	3x+5=-3x-2	32	65,3%	17	34,7%	29	59,2%	20	40,8%
	2x-8=-7x-4	23	46,9%	26	53,1%	22	44,9%	27	55,1%
	-7x-7=-8x-5	16	32,7%	33	67,3%	15	30,6%	34	69,4%
	4x+9=9x+5	25	51,0%	24	49,0%	23	46,9%	26	53,1%
	-6x+8=8x-8	31	63,3%	18	36,7%	28	57,1%	21	42,9%
	8x+5=6x+7	15	30,6%	34	69,4%	13	26,5%	36	73,5%
	-3x+3=-6x-2	33	67,3%	16	32,7%	31	63,3%	18	36,7%
	-7x+4=-6x+5	15	30,6%	34	69,4%	14	28,6%	35	71,4%
	8x+9=0	26	53,1%	23	46,9%	23	46,9%	26	53,1%
	-9x-6=5x-4	33	67,3%	16	32,7%	31	63,3%	18	36,7%
	x=5+4x	33	67,3%	16	32,7%	32	65,3%	17	34,7%
	-3x+8=-2x-6	16	32,7%	33	67,3%	15	30,6%	34	69,4%
	4x=9x	30	61,2%	19	38,8%	25	51,0%	24	49,0%
	3000x+4000=2000x+6000	22	44,9%	27	55,1%	20	40,8%	29	59,2%
	5x-5=2x-9	30	61,2%	19	38,8%	29	59,2%	20	40,8%
Test B	-8x-5=-7x-7	30	32,6%	62	67,4%	30	32,6%	62	67,4%
	-2x-6=-3x+8	20	21,7%	72	78,3%	20	21,7%	72	78,3%
	5x-4=-9x-6	56	60,9%	36	39,1%	52	56,5%	40	43,5%
	6x+7=8x+5	33	35,9%	59	64,1%	32	34,8%	60	65,2%
	-7x-4=2x-8	56	60,9%	36	39,1%	53	57,6%	39	42,4%
	9x+1=3x-8	50	54,3%	42	45,7%	50	54,3%	42	45,7%
	-6x-2=-3x+3	52	56,5%	40	43,5%	50	54,3%	42	45,7%
	3000x+4000=2000x+6000	28	30,4%	64	69,6%	27	29,3%	65	70,7%
	-6x+5=-7x+4	22	23,9%	70	76,1%	22	23,9%	70	76,1%
	2x-9=5x-5	52	56,5%	40	43,5%	48	52,2%	44	47,8%
	8x+9=0	49	53,3%	43	46,7%	46	50,0%	46	50,0%
	9x+5=4x+9	32	34,8%	60	65,2%	31	33,7%	61	66,3%
	-3x-2=3x+5	47	51,1%	45	48,9%	44	47,8%	48	52,2%
	x=5+4x	56	60,9%	36	39,1%	53	57,6%	39	42,4%
	8x-8=-6x+8	48	52,2%	44	47,8%	42	45,7%	50	54,3%
	4x=9x	57	62,0%	35	38,0%	42	45,7%	50	54,3%
	-8+x=7	10	10,9%	82	89,1%	10	10,9%	82	89,1%
	-6x=9	46	50,0%	46	50,0%	44	47,8%	48	52,2%
Gesamt		1193	47,0%	1345	53,0%	1111	43,8%	1427	56,2%

Tabelle 112: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die immer die Standardstrategie ("x-Term nach links") anwenden (Test A: N = 49; Test B: N = 92) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die Standardstrategie immer anwenden)

		Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
		Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
		Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Test A	-8+x=7	34	16,5%	172	83,5%	34	16,5%	172	83,5%
	-6x=9	118	57,3%	88	42,7%	117	56,8%	89	43,2%
	3x-8=9x+1	118	57,3%	88	42,7%	102	49,5%	104	50,5%
	3x+5=-3x-2	131	63,6%	75	36,4%	118	57,3%	88	42,7%
	2x-8=-7x-4	116	56,3%	90	43,7%	104	50,5%	102	49,5%
	-7x-7=-8x-5	78	37,9%	128	62,1%	74	35,9%	132	64,1%
	4x+9=9x+5	106	51,5%	100	48,5%	94	45,6%	112	54,4%
	-6x+8=8x-8	114	55,3%	92	44,7%	99	48,1%	107	51,9%
	8x+5=6x+7	72	35,0%	134	65,0%	68	33,0%	138	67,0%
	-3x+3=-6x-2	122	59,2%	84	40,8%	107	51,9%	99	48,1%
	-7x+4=-6x+5	74	35,9%	132	64,1%	71	34,5%	135	65,5%
	8x+9=0	119	57,8%	87	42,2%	110	53,4%	96	46,6%
	-9x-6=5x-4	124	60,2%	82	39,8%	116	56,3%	90	43,7%
	x=5+4x	134	65,0%	72	35,0%	128	62,1%	78	37,9%
	-3x+8=-2x-6	74	35,9%	132	64,1%	70	34,0%	136	66,0%
	4x=9x	141	68,4%	65	31,6%	107	51,9%	99	48,1%
	3000x+4000=2000x+6000	85	41,3%	121	58,7%	82	39,8%	124	60,2%
	5x-5=2x-9	123	59,7%	83	40,3%	109	52,9%	97	47,1%
Test B	-8x-5=-7x-7	60	38,7%	95	61,3%	58	37,4%	97	62,6%
	-2x-6=-3x+8	57	36,8%	98	63,2%	51	32,9%	104	67,1%
	5x-4=-9x-6	94	60,6%	61	39,4%	82	52,9%	73	47,1%
	6x+7=8x+5	55	35,5%	100	64,5%	48	31,0%	107	69,0%
	-7x-4=2x-8	76	49,0%	79	51,0%	66	42,6%	89	57,4%
	9x+1=3x-8	91	58,7%	64	41,3%	83	53,5%	72	46,5%
	-6x-2=-3x+3	84	54,2%	71	45,8%	75	48,4%	80	51,6%
	3000x+4000=2000x+6000	71	45,8%	84	54,2%	66	42,6%	89	57,4%
	-6x+5=-7x+4	56	36,1%	99	63,9%	55	35,5%	100	64,5%
	2x-9=5x-5	89	57,4%	66	42,6%	77	49,7%	78	50,3%
	8x+9=0	82	52,9%	73	47,1%	73	47,1%	82	52,9%
	9x+5=4x+9	71	45,8%	84	54,2%	60	38,7%	95	61,3%
	-3x-2=3x+5	95	61,3%	60	38,7%	88	56,8%	67	43,2%
	x=5+4x	94	60,6%	61	39,4%	87	56,1%	68	43,9%
	8x-8=-6x+8	89	57,4%	66	42,6%	73	47,1%	82	52,9%
	4x=9x	113	72,9%	42	27,1%	74	47,7%	81	52,3%
	-8+x=7	25	16,1%	130	83,9%	25	16,1%	130	83,9%
	-6x=9	87	56,1%	68	43,9%	84	54,2%	71	45,8%
Gesamt		3272	50,4%	3226	49,6%	2935	45,2%	3563	54,8%

Tabelle 113: Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler, die niemals die Standardstrategie ("x-Term nach links") anwenden (Test A: N = 196; Test B: N = 155) (ausgewählt wurden die Schülerinnen und Schüler, die bei den "trennenden" Aufgaben die Standardstrategie niemals anwenden)

Strategie			Aufgabe richtig gelöst				Fehler bei Umformungen			
			Nein		Ja		Fehler		kein Fehler	
			Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent	Anzahl	Anzahl in Prozent
Standard	Klasse	44	61	56,5%	47	43,5%	59	54,6%	49	45,4%
		45	24	44,4%	30	55,6%	24	44,4%	30	55,6%
		46	14	19,4%	58	80,6%	14	19,4%	58	80,6%
		47	6	16,7%	30	83,3%	6	16,7%	30	83,3%
		48	32	35,6%	58	64,4%	30	33,3%	60	66,7%
		49	12	22,2%	42	77,8%	10	18,5%	44	81,5%
		50	20	37,0%	34	63,0%	19	35,2%	35	64,8%
		51	14	38,9%	22	61,1%	12	33,3%	24	66,7%
		52	10	13,9%	62	86,1%	10	13,9%	62	86,1%
		53	12	22,2%	42	77,8%	10	18,5%	44	81,5%
		54	23	31,9%	49	68,1%	21	29,2%	51	70,8%
		55	18	50,0%	18	50,0%	18	50,0%	18	50,0%
		56	24	44,4%	30	55,6%	24	44,4%	30	55,6%
		57	19	52,8%	17	47,2%	15	41,7%	21	58,3%
		59	22	30,6%	50	69,4%	22	30,6%	50	69,4%
		60	22	30,6%	50	69,4%	21	29,2%	51	70,8%
		61	35	27,8%	91	72,2%	31	24,6%	95	75,4%
		62	32	35,6%	58	64,4%	18	20,0%	72	80,0%
		63	21	58,3%	15	41,7%	20	55,6%	16	44,4%
		64	6	33,3%	12	66,7%	6	33,3%	12	66,7%
		65	38	35,2%	70	64,8%	36	33,3%	72	66,7%
		66	36	50,0%	36	50,0%	36	50,0%	36	50,0%
		67	48	66,7%	24	33,3%	47	65,3%	25	34,7%
		68	44	48,9%	46	51,1%	43	47,8%	47	52,2%
		69	27	75,0%	9	25,0%	21	58,3%	15	41,7%
		70	53	58,9%	37	41,1%	53	58,9%	37	41,1%
		71	9	16,7%	45	83,3%	9	16,7%	45	83,3%
		72	14	77,8%	4	22,2%	13	72,2%	5	27,8%
		73	36	66,7%	18	33,3%	36	66,7%	18	33,3%
		78	45	83,3%	9	16,7%	44	81,5%	10	18,5%
		80	82	65,1%	44	34,9%	78	61,9%	48	38,1%
		81	11	20,4%	43	79,6%	10	18,5%	44	81,5%
		82	22	61,1%	14	38,9%	22	61,1%	14	38,9%
		84	16	88,9%	2	11,1%	16	88,9%	2	11,1%
		86	1	5,6%	17	94,4%	1	5,6%	17	94,4%
		88	46	85,2%	8	14,8%	45	83,3%	9	16,7%
		89	36	66,7%	18	33,3%	36	66,7%	18	33,3%
		90			18	100,0%			18	100,0%
		91	18	100,0%			18	100,0%		
		95	12	66,7%	6	33,3%	7	38,9%	11	61,1%
		96	94	87,0%	14	13,0%	89	82,4%	19	17,6%
		97	17	94,4%	1	5,6%	16	88,9%	2	11,1%
		98	15	27,8%	39	72,2%	14	25,9%	40	74,1%
		99	46	85,2%	8	14,8%	31	57,4%	23	42,6%
	Gesamt		1193	47,0%	1345	53,0%	1111	43,8%	1427	56,2%
günstige Strategie	Klasse	44	9	25,0%	27	75,0%	6	16,7%	30	83,3%
		45	36	50,0%	36	50,0%	36	50,0%	36	50,0%
		46	6	33,3%	12	66,7%	6	33,3%	12	66,7%
		49	6	33,3%	12	66,7%	6	33,3%	12	66,7%
		50	24	44,4%	30	55,6%	19	35,2%	35	64,8%
		51	18	50,0%	18	50,0%	10	27,8%	26	72,2%
		52	5	13,9%	31	86,1%	5	13,9%	31	86,1%
		53	3	16,7%	15	83,3%	3	16,7%	15	83,3%
		54	13	36,1%	23	63,9%	13	36,1%	23	63,9%
		55	33	45,8%	39	54,2%	31	43,1%	41	56,9%
		56	32	29,6%	76	70,4%	29	26,9%	79	73,1%
		59	3	16,7%	15	83,3%	3	16,7%	15	83,3%
		60	5	13,9%	31	86,1%	5	13,9%	31	86,1%
		61			18	100,0%			18	100,0%
		62	10	18,5%	44	81,5%	9	16,7%	45	83,3%
		63	6	33,3%	12	66,7%	5	27,8%	13	72,2%
		64	7	19,4%	29	80,6%	7	19,4%	29	80,6%
		68	14	38,9%	22	61,1%	13	36,1%	23	63,9%
		69	8	22,2%	28	77,8%	8	22,2%	28	77,8%
		70	5	27,8%	13	72,2%	5	27,8%	13	72,2%
		71	7	38,9%	11	61,1%	7	38,9%	11	61,1%
		78	2	11,1%	16	88,9%	1	5,6%	17	94,4%
		82	48	88,9%	6	11,1%	40	74,1%	14	25,9%
		86	1	2,8%	35	97,2%	1	2,8%	35	97,2%
		98	13	72,2%	5	27,8%	5	27,8%	13	72,2%
		58	15	20,8%	57	79,2%	14	19,4%	58	80,6%
		76	9	50,0%	9	50,0%	8	44,4%	10	55,6%
		77	18	100,0%			18	100,0%		
		83	2	11,1%	16	88,9%	2	11,1%	16	88,9%
		92	20	37,0%	34	63,0%	20	37,0%	34	63,0%
		93	13	72,2%	5	27,8%	13	72,2%	5	27,8%
		94	10	55,6%	8	44,4%	8	44,4%	10	55,6%
	Gesamt		401	35,4%	733	64,6%	356	31,4%	778	68,6%

Tabelle 114: Lösungserfolg auf Klassenebene der Schülerinnen und Schüler, (gruppiert nach Standardstrategie und günstige Strategie)

Gruppenstatistiken

Klassen		N	Mittelwert	Standard-abweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Aufgabe richtig gelöst	mit mehr als 50 % Standardstrategie	3348	,5463	,4979	8,605E-03
	mit mehr als 50 % günstige Strategie	1080	,6019	,4897	1,490E-02

		Levene-Test der Varianzgleichheit		T-Test für die Mittelwertgleichheit						
		F	Signifikanz	T	df	Sig. (2-seitig)	Mittlere Differenz	Standardfehler der Differenz	95% Konfidenzintervall der Differenz	
									Untere	Obere
Aufgabe richtig gelöst	Varianzen sind gleich	54,853	,000	-3,201	4426	,001	-5,5556E-02	1,736E-02	-8,9581E-02	-2,1531E-02
	Varianzen sind nicht gleich			-3,228	1852,170	,001	-5,5556E-02	1,721E-02	-8,9306E-02	-2,1805E-02

Gruppenstatistiken

Klassen		N	Mittelwert	Standard-abweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Aufgabe richtig gelöst	mit mehr als 50 % Standardstrategie	3348	,5463	,4979	8,605E-03
	ohne ausgeprägte Strategie	11124	,5455	,4979	4,721E-03

		Levene-Test der Varianzgleichheit		T-Test für die Mittelwertgleichheit						
		F	Signifikanz	T	df	Sig. (2-seitig)	Mittlere Differenz	Standardfehler der Differenz	95% Konfidenzintervall der Differenz	
									Untere	Obere
Aufgabe richtig gelöst	Varianzen sind gleich	,027	,868	,082	14470	,934	8,091E-04	9,816E-03	-1,8431E-02	2,005E-02
	Varianzen sind nicht gleich			,082	5514,775	,934	8,091E-04	9,815E-03	-1,8433E-02	2,005E-02

Gruppenstatistiken

Klassen		N	Mittelwert	Standard-abweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Aufgabe richtig gelöst	mit mehr als 50 % günstige Strategie	1080	,6019	,4897	1,490E-02
	ohne ausgeprägte Strategie	11124	,5455	,4979	4,721E-03

		Levene-Test der Varianzgleichheit		T-Test für die Mittelwertgleichheit						
		F	Signifikanz	T	df	Sig. (2-seitig)	Mittlere Differenz	Standardfehler der Differenz	95% Konfidenzintervall der Differenz	
									Untere	Obere
Aufgabe richtig gelöst	Varianzen sind gleich	98,727	,000	3,557	12202	,000	5,636E-02	1,585E-02	2,530E-02	8,743E-02
	Varianzen sind nicht gleich			3,606	1305,189	,000	5,636E-02	1,563E-02	2,570E-02	8,703E-02

Tabelle 115: T-Test bei unabhängigen Stichproben: Lösungserfolg auf Klassenebene
(Gruppierung der Klassen: mehr als 50-prozentiger Anteil Standardstrategie N1 = 186, mehr als 50-prozentiger Anteil günstige Strategie N2 = 60, ohne ausgeprägte Strategie N3 = 618)

			Schülergruppen				Gesamt
			immer günstig	immer Standard	teils/teils	niemals günstig, niemals Standard	
Aufgabe richtig gelöst	Nein	Anzahl	401	1193	3393	2018	7005
		% der Gesamtzahl	2,6%	7,7%	21,8%	13,0%	45,0%
	Ja	Anzahl	733	1345	5175	1294	8547
		% der Gesamtzahl	4,7%	8,6%	33,3%	8,3%	55,0%
Gesamt[a]		Anzahl	1134	2538	8568	3312	15552
		% der Gesamtzahl	7,3%	16,3%	55,1%	21,3%	100,0%

a. chi-quadrat = 487 df = 3

Tabelle 116: Kreuztabelle: Schülergruppen - Lösungserfolg
(Gruppierung der Schüler aufgrund der "trennenden" Aufgaben)

		Häufigkeit	Prozent
	-6x=9	1001	4,1
	-8+x=7	857	3,5
	3000x+4000=2000x+6000	834	3,4
	8x+9=0	827	3,4
	x=5+4x	813	3,4
	4x=9x	686	2,8
	8x=-9	622	2,6
	-3x=5	593	2,4
	1000x=2000	589	2,4
	3x-8=9x+1	440	1,8
	2x-8=-7x-4	431	1,8
	-6x+8=8x-8	431	1,8
	3x+5=-3x-2	430	1,8
	4x+9=9x+5	430	1,8
	-7x-7=-8x-5	429	1,8
	8x+5=6x+7	429	1,8
	-3x+3=-6x-2	426	1,8
	-9x-6=5x-4	425	1,8
	-3x+8=-2x-6	423	1,7
	-8x-5=-7x-7	422	1,7
	-2x-6=-3x+8	422	1,7
	6x+7=8x+5	422	1,7
	-7x-4=2x-8	422	1,7
	-6x-2=-3x+3	421	1,7
	-7x+4=-6x+5	421	1,7
	5x-4=-9x-6	420	1,7
	9x+1=3x-8	419	1,7
	-6x+5=-7x+4	418	1,7
	2x-9=5x-5	416	1,7
	5x-5=2x-9	416	1,7
	8x-8=-6x+8	415	1,7
	9x+5=4x+9	412	1,7
	-3x-2=3x+5	410	1,7
	2x=2	340	1,4
	5x=4	309	1,3
	6x=-9	309	1,3
	14x=16	295	1,2
	3x=-5	286	1,2
	14x=-2	284	1,2
	6x=-7	280	1,2
	1000x+4000=6000	280	1,2
	9x=4	276	1,1
	3x=-4	274	1,1
	-5x=-4	181	,7
	-2x=-2	180	,7
	-14x=2	180	,7
	-5=3x	172	,7
	-5x=0	163	,7
	4=5x	163	,7
	16=14x	161	,7
	3000x=2000x+2000	158	,7
	-3x=4	157	,6
	-6x=7	156	,6
	-9x=-4	154	,6
	2=2x	149	,6
	0=5x	147	,6
	14x-4=-6	144	,6
	6x+1=-8	144	,6
	4=9x	138	,6
	-14x=-16	134	,6
	x=-9/6	134	,6
	9x-8=-4	133	,5
	6x+5=-2	126	,5
	-2=14x	125	,5
	3x-5=-9	124	,5
	5x+5=9	122	,5
	-4=3x	120	,5
	3x+3=-2	116	,5
	-9=6x	115	,5
	2x+5=7	113	,5
	14x-8=8	109	,4
	-7=6x	105	,4
	-1x=-2	104	,4
	3x=9x+9	102	,4
	Gesamt	24234	100,0

Tabelle 117: absolute Häufigkeiten der Gleichungen (nur unter Beachtung von Gleichungen, z. B. -6x = 9, die im Test A oder Test B mehr als 100mal auftreten)

		Häufigkeit	Prozent
Gleichungsform	Ax+B=Cx+D	10980	45,3
	Ax=D	6600	27,2
	Ax+B=D	2268	9,4
	B=Cx	1248	5,1
	Ax+B=0	827	3,4
	x=Cx+D	813	3,4
	Ax=Cx	684	2,8
	Ax=Cx+D	260	1,1
	x=D	242	1,0
	Ax=0	163	,7
	0=Cx	147	,6
	Gesamt	24234	100,0

Tabelle 118: absolute Häufigkeiten der Gleichungsformen (nur unter Beachtung von Gleichungen, die im Test A oder Test B mehr als 100mal auftreten)

		falsche Umformung
		Mittelwert
Gleichungsform	x=D+Cx	,33
	Ax=D	,27
	B=Cx	,21
	Ax=Cx	,17
	x=D	,16
	Ax=0	,16
	Ax+B=0	,15
	Ax=Cx+D	,13
	Ax+B=Cx+D	,13
	Ax+B=D	,09
	0=Cx	,08
Gesamt		,18

Tabelle 119: Anteil der Fehlerquote bei den entsprechenden Gleichungsformen (nur unter Beachtung von Gleichungen, die im Test A oder Test B mehr als 100mal auftreten)

		falsche Umformung
		Mittelwert
Gleichung	-6x=9	,40
	14x=-2	,36
	-2=14x	,35
	-14x=2	,34
	x=5+4x	,33
	6x=-7	,32
	3x=-5	,31
	8x=-9	,30
	3x=-4	,29
	-5x=-4	,27
	-14x=-16	,26
	-3x=5	,25
	6x=-9	,25
	-9x=-4	,25
	-3x=4	,24
	-4=3x	,24
	-7=6x	,24
	-5=3x	,23
	9x=4	,22
	4=9x	,22
	3x=9x+9	,21
	-1x=-2	,20
	-9=6x	,20
	5x=4	,19
	-6x=7	,19
	1000x=2000	,19
	4=5x	,18
	-2x=-2	,18
	16=14x	,17
	4x=9x	,17
	14x=16	,17
	3x-8=9x+1	,16
	-3x-2=3x+5	,16
	3x+5=-3x-2	,16
	9x+1=3x-8	,16
	-5x=0	,16
	-6x+8=8x-8	,16
	-8x-5=-7x-7	,15
	5x-4=-9x-6	,15
	8x+9=0	,15
	3x-5=-9	,15
	-7x-4=2x-8	,14
	-6x-2=-3x+3	,13
	-3x+8=-2x-6	,13
	5x-5=2x-9	,13
	2x-9=5x-5	,13
	-6x+5=-7x+4	,13
	-2x-6=-3x+8	,13
	6x+1=-8	,13
	-3x+3=-6x-2	,12
	-7x-7=-8x-5	,12
	2x-8=-7x-4	,12
	-9x-6=5x-4	,12
	-8+x=7	,12
	-7x+4=-6x+5	,12
	8x-8=-6x+8	,12
	3x+3=-2	,11
	4x+9=9x+5	,11
	9x+5=4x+9	,11
	3000x+4000=2000x+6000	,11
	6x+7=8x+5	,11
	x=-9/6	,10
	2x=2	,10
	14x-4=-6	,09
	3000x=2000x+2000	,09
	6x+5=-2	,09
	9x-8=-4	,08
	14x-8=8	,08
	0=5x	,08
	8x+5=6x+7	,08
	2=2x	,07
	5x+5=9	,04
	1000x+4000=6000	,03
	2x+5=7	,01
Gesamt		,18

Tabelle 120: Anteil der Fehlerquote bei den entsprechenden Gleichungen (nur unter Beachtung von Gleichungen, die im Test mehr als 100mal auftreten)

			richtige Umformung	falsche Umformung	Gesamt
Zeilentext	-6x=9	Anzahl	599	402	1001
		% der Gesamtzahl	45,7%	30,7%	76,4%
	6x=-9	Anzahl	231	78	309
		% der Gesamtzahl	17,6%	6,0%	23,6%
Gesamt[a]		Anzahl	830	480	1310
		% der Gesamtzahl	63,4%	36,6%	100,0%

a. chi-quadrat = 22,6 df = 1

Tabelle 121: Kreuztabelle: -6x=9 und 6x=-9 / Umformungserfolg

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th></th><th rowspan="2">erkannte Fehler</th><th colspan="8">Fehlerart</th></tr>
<tr><th>falsch</th><th>Vorzeichen falsch</th><th>Vert. Mul./Division</th><th>Kehrwert gebildet</th><th>Vert. Add./Division</th><th>Vert. x-Term mit Kon.</th><th>nur eine Seite</th><th>abgebrochen</th><th>Syntax verletzt</th></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6 => x=15</td><td>83</td><td>83</td><td></td><td></td><td></td><td>83</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6 => x=9+6</td><td>24</td><td>24</td><td></td><td></td><td></td><td>24</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => x=1,5</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(+6) => x=1,5</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => x=9</td><td>5</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1,5</td><td>27</td><td>27</td><td>27</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -6 => x=9-6</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => x=15</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *6 => x=54</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=-6/9</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-2/3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6x => x=9/6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => x=3/2</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *(-1) => 6x=-4</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => -6*(-1,5)=9</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :9 => -x=6/9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *6 => x=+54</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=-1,p33</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => -6*-1,5=9</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -9 => -15x=0</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-6/9</td><td>7</td><td>7</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=-1/2</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *(-6) => x=-54</td><td>4</td><td>4</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-54</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=3/2=1b1/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=-2/3</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => -1,5=9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=9/6=3/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=9/6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=15</td><td>4</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => x=1,_</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => 0=15x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=9/6</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => =6x+9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=1,5</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6x => x=1,5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=9/6=1b3/6=1b1/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=9/6=1b3/6=1b1/2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=-0,5</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *(-1/6) => x=1,5</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-1b1/3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=3/2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=3/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => x=9/6=1b1/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :x => -6=9x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6x => 1=-9-6x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=9/6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-1,_</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1,6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *(-1/6) => x=3/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-9/3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *(-1/6) => x=9/6=3/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => -x=1/2</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *(-1/6) => x=9/6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1b1/2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -6 => x=3</td><td>5</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => 9+6x</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => -3/2=-9/6=x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=9/6=3/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => -x=2/3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-6/9=(-2/3)</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => +x=15</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=9/6=3/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *(-1) => 6x=9</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :x => -6=9:x</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=</td><td>10</td><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => x=9:6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => -x=2/3</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => x=1,3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=+1,5</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +(:6) => x=15</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => -6/9=x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => x=9/6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => x=</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=9:-6</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6x) => x=-1,33</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6x) => x=1,33</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=2/3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | (-6x) => x=-3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-1b3/6=-1b1/3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=-9/6=1b3/6=1b1/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=1b3/6=1b1/3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x-3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => x=15x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=-1,3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th></th><th rowspan="2">erkannte Fehler</th><th colspan="8">Fehlerart</th></tr>
<tr><th>falsch</th><th>Vorzeichen falsch</th><th>Vert. Mul./Division</th><th>Kehrwert gebildet</th><th>Vert. Add./Division</th><th>Vert. x-Term mit Kon.</th><th>nur eine Seite</th><th>abgebrochen</th><th>Syntax verletzt</th></tr>
<tr><td>-6x=9 | :9 => x=-0,p6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=1,05</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => x=14x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1,05</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :9 => x=0,6p6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-1,3</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -9 => -6x=0</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-0,p3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => x=9+6x</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=-1,6</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | (-6) => x=9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1,_</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-1/3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=(-6/9)</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=15</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-9/-6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-(6) => x=9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-3/2=1b1/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -6x => x=3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=-2/3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1b3/6=1b1/3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *(-6) => x=15</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -6 => x=9+6</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => =9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => 9+6=15</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6x) => x=1,5</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=-1,4</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-1,35</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=-15</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=1,3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :9 => x=0,3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6x) => x=-1b9/6</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-2,5</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6 => -x=-3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-6/9=-2/3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=9-6</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -9 => x=-6</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => =9+6x</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => -x(6/9)</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 => -6+13=9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *(-6) => x=54</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *(-6) => x=</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6x => x=-1,3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -9 => =-6x-9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | *6 => -x=54</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => +6x=9</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +7 => x=6+9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => -6+15=9</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +5x => x=-9+5x</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :9 => x=0,p66</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=6/9</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(+6) => x=1b3/6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=1b1/2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=1b3/9</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1b3/9</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=0,6p6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1,3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=1b2/5</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => -6x+9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => x=9</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :+6 => x=1,5</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=-1,3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => -x=-1,5</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => -6x=9+x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=1,2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6x) => x=9/6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +x => -6=9x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :6 => x=1,05</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -9 => -9=-6x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=-6x+9</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6 => x=15x</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=1,5</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => =-15x</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6 => 6x=15</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=9+6</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 => x=3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -9 => -15x=</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | -9 => -6x</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :-6 => x=3</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | :(-6) => x=-15</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-6x=9 | +6x => x=9-6x</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Gesamt Anzahl</td><td>402</td><td>359</td><td>144</td><td>11</td><td>26</td><td>144</td><td>1</td><td>19</td><td>14</td><td>21</td></tr>
</table>

Tabelle 122: Fehlerklassifikation bei Umformungen von -6x=9

			richtig umgeformt	falsch umgeformt
			Anzahl	Anzahl
Schülernummer	13	-6x=9 | +6 => x=9+6		1
		-6x=9 | :6 => x=1,5		1
	17	-6x=9 | +6 => x=9+6		1
		-6x=9 | :(-6) => -x=1,5	1	
	32	-6x=9 | :(-6) => x=1,5		1
		-6x=9 | *(-6) => x=-1,5	1	
	35	-6x=9 | +6 => x=9+6		1
		-6x=9 | :-6 => x=-9/6=-3/2	1	
	65	-6x=9 | :(-6) => x=-3/2	1	
		-6x=9 | :(-6) => x=-2/3		1
	67	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
	74	-6x=9 => -6*(-1,5)=9		2
	98	-6x=9 | :(-6) => x=1,5		2
	120	-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
		-6x=9 | -9 => -15x=0		1
	125	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
	131	-6x=9 | :-6 => x=-1/2		1
		-6x=9 | *(-6) => x=-54		1
	149	-6x=9 | :6 => x=3/2		2
	181	-6x=9 => x=9/6=3/2		1
		-6x=9 => x=9/6		1
	189	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
	191	-6x=9 | +6 => x=9+6		1
		-6x=9 | :(-6) => x=1,5		1
	225	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-3/2	1	
	243	-6x=9 | :(-6) => x=9/6=1b3/6=1b1/2		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-1b3/6=-1b1/2	1	
	245	-6x=9 | :-6 => x=-0,5		2
	247	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=1b3/6	1	
	256	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-3/2	1	
	277	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=3/2		1
	280	-6x=9 | *(-6) => x=-54		1
		-6x=9 | :-6 => x=3/2		1
	282	-6x=9 | :(-6) => x=1,5		2
	306	-6x=9 | :-6 => x=-9/6	1	
		-6x=9 | :6 => x=9/6=1b1/2		1
	318	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-3b1/3	1	

Tabelle 123: Umformungen von Schülerinnen und Schülern, die die Gleichung -6x=9 während des Tests zweimal umformten und diese Umformung mindestens einmal fehlerhaft ist.

			richtig umgeformt	falsch umgeformt
			Anzahl	Anzahl
Schülernummer	345	-6x=9 | :(-6) => x=-9/6	1	
		-6x=9 | :(-6) => x=-9/3		1
	405	-6x=9 => x=-9/6	1	
		-6x=9 | -6 => x=3		1
	465	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=9/6=3/2		1
	467	-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
		-6x=9 | :(-6) => x=1,5		1
	473	-6x=9 | :(-6) => x=-6/9		2
	484	-6x=9 | :6 => -x=2/3		2
	524	-6x=9 | :(-6) => +x=15		1
		-6x=9 | :-6 => x=9/6=3/2		1
	550	-6x=9 | :(-6x) => x=-1,33		1
		-6x=9 | :(-6x) => x=1,33		1
	554	-6x=9 | :(-6) => x=2/3		2
	563	-6x=9 | :(-6) => x=9/6=1b3/6=1b1/2		1
		-6x=9 | :-6 => x=-9/6=1b3/6=1b1/2		1
	571	-6x=9 | :(-6) => x=-3		1
		-6x=9 | :(-6) => x-3		1
	574	-6x=9 | :(-6) => x=9/6		2
	576	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=9/-6=-1b3/6	1	
	579	-6x=9 | :(-6) => x=1,5		2
	583	-6x=9 | +6x => x=9		1
		-6x=9 | +6x => x=15x		1
	586	-6x=9 | :-6x => x=1,5		2
	590	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :-6 => x=-1,5	1	
	592	-6x=9 | :-6 => x=-1,5	1	
		-6x=9 | :-6 => x=1,5		1
	614	-6x=9 | :6 => x=1,5		2
	636	-6x=9 | +6 => x=9+6		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
	642	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=15		1
	655	-6x=9 | :-6 => x=-1,5	1	
		-6x=9 | :-6 => x=1,05		1
	666	-6x=9 | :9 => x=0,6p6		2
	668	-6x=9 | :-6 => x=-1,5	1	
		-6x=9 | :-6 => x=1,5		1
	683	-6x=9 | :-3 => 2x=-3	1	
		-6x=9 | :-6 => x=-2/3		1
	695	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | *(-6) => x=15		1
	704	-6x=9 => -6x=9	1	
		-6x=9 | +6x => =9		1

Tabelle 123: Umformungen von Schülerinnen und Schülern, die die Gleichung -6x=9 während des Tests zweimal umformten und diese Umformung mindestens einmal fehlerhaft ist.

			richtig umgeformt	falsch umgeformt
			Anzahl	Anzahl
Schülernummer	711	-6x=9 => x=-1,4		2
	718	-6x=9 | +6 => x=15		2
	719	-6x=9 | :-6 => x=1,3		1
		-6x=9 | :9 => x=0,3		1
	723	-6x=9 | *(-6) => x=-54		1
		-6x=9 | :(-6) => x=		1
	726	-6x=9 | :(-6) => x=1,5		1
		-6x=9 | -6 => x=3		1
	757	-6x=9 | *(-6) => x=54		2
	758	-6x=9 | :(-6) => x=		1
		-6x=9 | *(-6) => x=		1
	782	-6x=9 | :-6 => x=1,5		1
		-6x=9 => -6+15=9		1
	785	-6x=9 | +6x => x=9		1
		-6x=9 | :-6x => x=1,5		1
	801	-6x=9 | :(-6) => x=-9/6	1	
		-6x=9 | :(-6) => x=-6/9		1
	808	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=9		1
	811	-6x=9 | +6x => x=9		1
		-6x=9 | :(-6) => x=6/9		1
	815	-6x=9 | :(-6) => x=		2
	826	-6x=9 | :(-6) => x=1,3		2
	833	-6x=9 => -6x=9	1	
		-6x=9 | -6 => x=3		1
	850	-6x=9 | :(-6) => x=		1
		-6x=9 | :-6 => x=		1
	860	-6x=9 | :-6 => x=1,2		2
	897	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | -9 => -15x=		1
	900	-6x=9 | +6 => x=15		1
		-6x=9 | :(-6) => x=-9/6=-1b1/2	1	
	903	-6x=9 | :(-6) => x=		1
		-6x=9 | :-6 => x=3		1
	904	-6x=9 | :(-6) => x=-1,5	1	
		-6x=9 | :(-6) => x=-15		1
	909	-6x=9 | *(-1) => 6x=9		2
	916	-6x=9 | :(-6) => x=-9/6	1	
		-6x=9 | *(-1) => 6x=9		1

Tabelle 123: Umformungen von Schülerinnen und Schülern, die die Gleichung -6x=9 während des Tests zweimal umformten und diese Umformung mindestens einmal fehlerhaft ist.

			Gesamt	falsche Umformung		Aufgabe richtig gelöst	
				richtige Umformung	falsche Umformung	Nein	Ja
Ergebnis	x=2	Anzahl	518	512	6	13	505
		Anzahl in Prozent	67,8%	67,0%	,8%	1,7%	66,1%
	x=2000	Anzahl	81		81	81	
		Anzahl in Prozent	10,6%		10,6%	10,6%	
	x=1000	Anzahl	42	3	39	42	
		Anzahl in Prozent	5,5%	,4%	5,1%	5,5%	
	2=x	Anzahl	18	18		2	16
		Anzahl in Prozent	2,4%	2,4%		,3%	2,1%
	x=-2	Anzahl	10	10		10	
		Anzahl in Prozent	1,3%	1,3%		1,3%	
	x=10	Anzahl	9	8	1	9	
		Anzahl in Prozent	1,2%	1,0%	,1%	1,2%	
	x=2000/1000	Anzahl	6	6			6
		Anzahl in Prozent	,8%	,8%			,8%
	x=0,5	Anzahl	5		5	5	
		Anzahl in Prozent	,7%		,7%	,7%	
	x=1/2	Anzahl	5	1	4	5	
		Anzahl in Prozent	,7%	,1%	,5%	,7%	
	1x=2	Anzahl	4	4			4
		Anzahl in Prozent	,5%	,5%			,5%
	2000=x	Anzahl	4		4	4	
		Anzahl in Prozent	,5%		,5%	,5%	
	-1000=x	Anzahl	3		3	3	
		Anzahl in Prozent	,4%		,4%	,4%	
	x=2000/1000=2	Anzahl	3	3			3
		Anzahl in Prozent	,4%	,4%			,4%
	x=-1000	Anzahl	3		3	3	
		Anzahl in Prozent	,4%		,4%	,4%	
	x=+2	Anzahl	2	2			2
		Anzahl in Prozent	,3%	,3%			,3%
	-2=x	Anzahl	2	2		2	
		Anzahl in Prozent	,3%	,3%		,3%	
	x=2000000	Anzahl	2		2	2	
		Anzahl in Prozent	,3%		,3%	,3%	
	-2000/5000=x	Anzahl	2	1	1	2	
		Anzahl in Prozent	,3%	,1%	,1%	,3%	
	x=1000/2000	Anzahl	2		2	2	
		Anzahl in Prozent	,3%		,3%	,3%	
	x=2000/5000	Anzahl	2	2		2	
		Anzahl in Prozent	,3%	,3%		,3%	

Tabelle 124: Endergebnisse bei 3000x + 4000 = 2000x + 6000 (berücksichtigt sind nur die Fälle, bei denen eine Endform der Art x = D angegeben wurde)

			Gesamt	falsche Umformung		Aufgabe richtig gelöst	
				richtige Umformung	falsche Umformung	Nein	Ja
Ergebnis	x=15000	Anzahl	2		2	2	
		Anzahl in Prozent	,3%		,3%	,3%	
	x=1	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=0	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=-2000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=5	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=4	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=2,5	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	-2=-x	Anzahl	1	1			1
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%			,1%
	x=-4	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=7500	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=0,4	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	1000/2000=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=2000/3000-2000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	1000000=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=1/2000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=2/1=2	Anzahl	1	1			1
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%			,1%
	0,5=x	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=2/1	Anzahl	1	1			1
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%			,1%
	x=-2/5	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	5000/2000=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	

Tabelle 124: Endergebnisse bei 3000x + 4000 = 2000x + 6000 (berücksichtigt sind nur die Fälle, bei denen eine Endform der Art x = D angegeben wurde)

			Gesamt	falsche Umformung		Aufgabe richtig gelöst	
				richtige Umformung	falsche Umformung	Nein	Ja
Ergebnis	x=-2000/-1000	Anzahl	1	1			1
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%			,1%
	x=-2000/1000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	1/2=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	-7000=x	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	x=998,5	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=9000	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	750=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=1,10	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=1,4	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	1000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=3000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x0,5	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	-2000/-1000=x	Anzahl	1	1			1
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%			,1%
	x=200	Anzahl	1	1		1	
		Anzahl in Prozent	,1%	,1%		,1%	
	15000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=-3000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=5000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=-8000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	x=+2000	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
	-1150=x	Anzahl	1		1	1	
		Anzahl in Prozent	,1%		,1%	,1%	
Gesamt	Anzahl		764	588	176	223	541

Tabelle 124: Endergebnisse bei 3000x + 4000 = 2000x + 6000 (berücksichtigt sind nur die Fälle, bei denen eine Endform der Art x = D angegeben wurde)

			Aufgabe richtig gelöst		Gesamt
			Nein	Ja	
	Lehrer	Anzahl	3804	5448	9252
		% von Lehrer / Lehrerin	41,1%	58,9%	100,0%
	Lehrerin	Anzahl	1201	2039	3240
		% von Lehrer / Lehrerin	37,1%	62,9%	100,0%
Gesamt[a]		Anzahl	5005	7487	12492
		% von Lehrer / Lehrerin	40,1%	59,9%	100,0%

a. chi-quadrat = 16,37 df = 1

Tabelle 125: Kreuztabelle: Geschlecht des Lehrers - Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler

Geschlecht der Schüler				Aufgabe richtig gelöst		Gesamt
				Nein	Ja	
weiblich[a]		Lehrer	Anzahl	2061	2925	4986
			% von Lehrer / Lehrerin	41,3%	58,7%	100,0%
		Lehrerin	Anzahl	608	1066	1674
			% von Lehrer / Lehrerin	36,3%	63,7%	100,0%
	Gesamt		Anzahl	2669	3991	6660
			% von Lehrer / Lehrerin	40,1%	59,9%	100,0%
männlich[b]		Lehrer	Anzahl	1743	2523	4266
			% von Lehrer / Lehrerin	40,9%	59,1%	100,0%
		Lehrerin	Anzahl	593	973	1566
			% von Lehrer / Lehrerin	37,9%	62,1%	100,0%
	Gesamt		Anzahl	2336	3496	5832
			% von Lehrer / Lehrerin	40,1%	59,9%	100,0%

a. chi-quadrat = 13,13 df = 1

b. chi-quadrat = 4,27 df = 1

Tabelle 126: Kreuztabelle: Geschlecht des Lehrers - Lösungserfolg der Schülerinnen und Schüler
(gruppiert nach Geschlecht der Schüler)